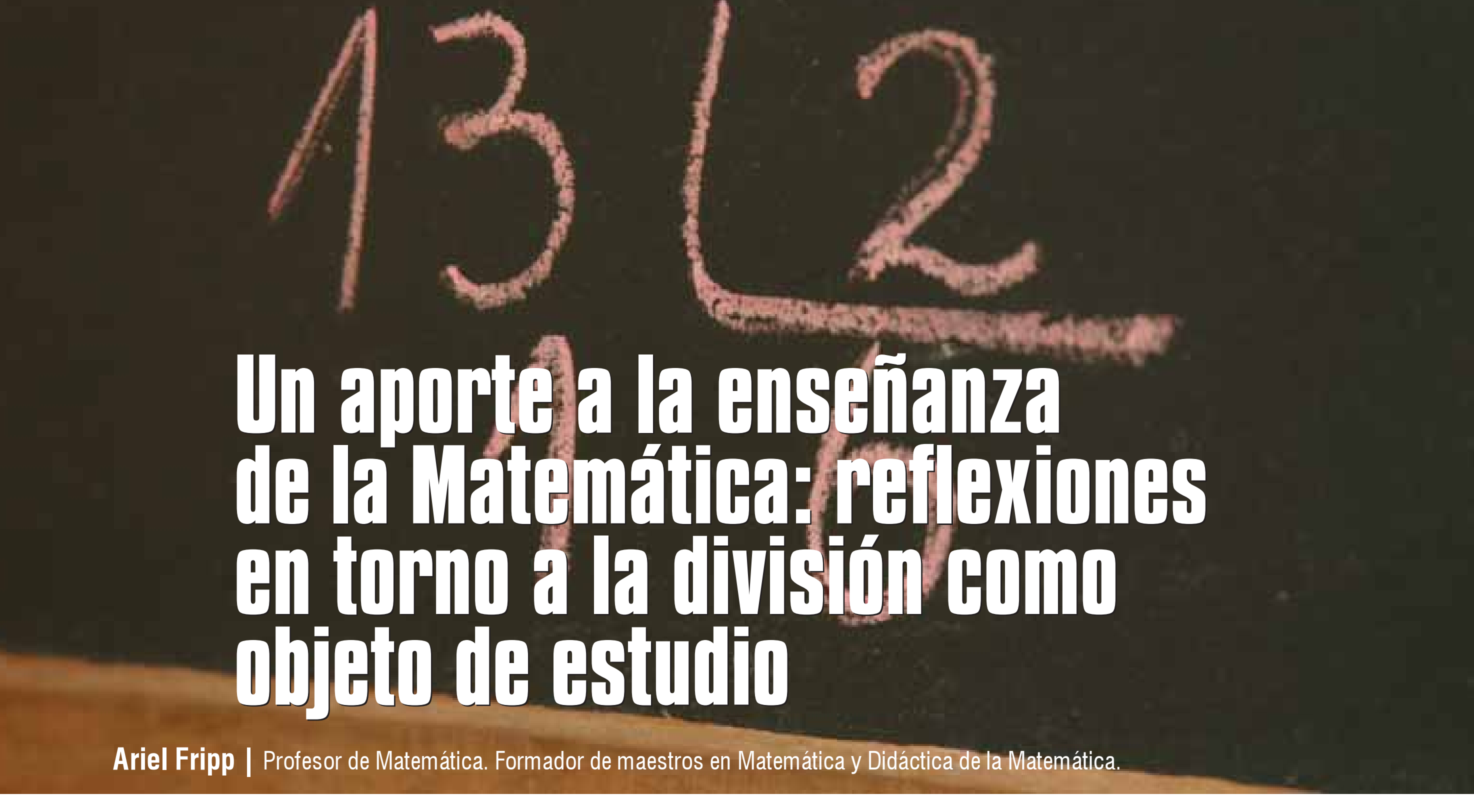

Un aporte a la enseñanza de la Matemática: reflexiones en torno a la división como objeto de estudio

Ariel Fripp | Profesor de Matemática. Formador de maestros en Matemática y Didáctica de la Matemática.

En el momento de abordar el eje Operaciones en la escuela primaria, son variados los problemas a los cuales el maestro se tiene que enfrentar.

Ocupa un lugar importante el relativo a la enseñanza de la división.

Los docentes destacan que a los alumnos se les dificulta reconocer que un problema se resuelve con esta operación si no aparecen indicadores del tipo *"repartir"*, y que en aquellas consignas donde figura dicha palabra, los alumnos suelen dividir aunque esta operación no resuelva la situación.

Surgen también dificultades al momento de enseñar el algoritmo convencional, el cual es muy costoso para alumnos y maestros en cuanto a la relación tiempo-aprendizaje. Aun dominando la técnica operatoria, los alumnos muestran, en general, carencias para estimar cocientes y poca habilidad para controlar los resultados obtenidos.

Creemos que estas dificultades, tan comunes en el accionar diario del maestro, conforman un conjunto de situaciones que dan sentido a desarrollar este artículo que intentará aportar algún elemento para la reflexión en torno a la división como un "problema de la enseñanza" en la escuela primaria.

Apoyándonos en los cuestionamientos sobre las operaciones que se formula Beatriz Rodríguez Rava (2005) podríamos preguntarnos, ¿cuáles son los aspectos del contenido "División" que la escolaridad básica debería abordar?

Ellos serían:

- Los significados de la división.
- Las relaciones entre la división y las restantes operaciones.
- Las relaciones entre la división y el Sistema de Numeración Decimal.
- Las propiedades de la división y la relación entre estas propiedades.
- La presencia de diferentes tipos de cálculos que permitan encontrar, al dividir, resultados pertinentes (cocientes o restos).
- Los algoritmos de cálculo.
- La resignificación de la división al "cambiar" de conjuntos numéricos (en especial cuando pasamos a trabajar con números racionales no naturales).
- La notación (¿Cómo se plantea una división exacta?, ¿y una entera?).
- Los diferentes tipos de división (entera y exacta).

Al analizar las prácticas habituales puede observarse en ellas una asimetría de tipo didáctico bastante importante. El aspecto que es atendido con mayor insistencia es el algoritmo de cálculo.

Parecería como si todas las actividades planificadas, aun aquellas que atienden diferentes aspectos de los citados antes, tuvieran como finalidad llegar al algoritmo convencional de la división.

Los maestros desean que sus alumnos, más allá de conocer y manejar este algoritmo, sepan comprenderlo como así también comprender los conocimientos que se ponen en juego al aplicarlo.

Consideramos poco provechoso abonar la disyuntiva algoritmo versus comprensión; insistir en esta discusión poco o nada aporta a la reformulación de las prácticas de aula y, por lo tanto, no da soluciones al problema de tener que abordar la división en la escuela.

Creemos pertinente el trabajo con el algoritmo convencional como otra instancia más de análisis y reflexión sobre esta operación, sobre los números involucrados y las propiedades.

Si la división se presenta como un problema en nuestra enseñanza, ello nos conduce inevitablemente a tener que considerarla, en primer lugar, como objeto de estudio. Comprender la división como operación es más que "saber hacer la cuenta", pero indudablemente explicitar las relaciones que sustentan el algoritmo convencional aporta instancias muy provechosas que contribuyen a la construcción del sentido de esta operación.

Si "aprender la técnica" se convierte en un objetivo para el maestro, sería esperable propiciar en estas instancias de trabajo el abordaje de otros aspectos que hacen a la operación en cuestión y que fueron citados antes.

Es en ese sentido que se planteará una serie de situaciones para que el maestro analice las relaciones entre los elementos de la división y así pueda diseñar o adaptar actividades pertinentes para sus cursos.

Es intención reflexionar sobre las relaciones que se dan entre los números intervinientes en la división entera, teniendo como soporte la propia definición de esta operación:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \cline{2-2} r & c \end{array} \qquad D = d \times c + r \qquad \text{con } r < d$$

Como los números que intervienen en la división entera son cuatro: Dividendo (D), divisor (d), cociente (c) y resto (r) iremos dejando fijos dos de ellos para observar de qué manera varían los restantes y detectar, si es posible, alguna dependencia entre ellos.

1. Fijamos el Dividendo y el divisor

$$\begin{array}{l|l} 37 & 3 \\ \cline{2-2} r & c \end{array} \qquad 37 = 3 \times c + r \qquad r < 3$$

Sabemos, por la propia definición de división entera, que el resto (r) no puede superar al divisor (3), por lo que únicamente tendríamos, en este caso, tres posibles restos: 0, 1 y 2.

Veamos qué ocurre para cada uno de estos posibles restos.

a) <u>Resto cero</u> $37 = 3 \times c$

Si el resto es cero, no es posible encontrar un número entero (c) que multiplicado por 3 dé 37.

Concluimos, entonces, que el resto de esta división no puede ser cero.

b) <u>Resto uno</u> $37 = 3 \times c + 1$

De esta igualdad concluimos que el cociente debe ser doce.

c) <u>Resto dos</u> $37 = 3 \times c + 2$

Lo que es equivalente a plantear $35 = 3 \times c$

Como ningún número natural multiplicado por tres genera un producto igual a 35, concluimos que el resto no puede ser dos.

Entonces, en nuestro ejemplo, cuando realizamos la división entera 37 por 3, observamos que solo podemos obtener un resto posible y que el cociente depende de ese valor.

Resto (r)	Cociente (c)
0	-
1	**12**
2	-

2. Fijamos el Dividendo y el cociente

$$\begin{array}{l|l} 37 & d \\ \cline{2-2} r & 4 \end{array} \qquad 37 = d \times 4 + r \qquad r < d$$

En esta división fijamos el Dividendo (37) y el cociente (4), lo cual afecta de forma muy interesante al divisor: este número debe ser menor que diez.

Veamos qué ocurre si consideramos los posibles divisores, atendiendo a la restricción anterior; confeccionemos una tabla para vincular cada posible divisor con su correspondiente resto.

Divisor (d)	Resto (r)
9	**1**
8	**5**
7	9
6	13
5	17
4	21
3	25
2	29
1	33

Esta tabla permite observar que, en realidad, el divisor no puede tomar todos los valores naturales menores que diez. Cuando consideramos como posible divisor al número 7, nos encontramos con que el resto obtenido es mayor (9). Esto continúa ocurriendo con los supuestos divisores 6, 5, 4, 3, 2, 1; para cada uno de ellos se obtienen "restos" mayores que los "divisores".

En el ejemplo que estamos analizando (37:4) podemos destacar que el divisor también se encuentra afectado por el resto, por lo que las posibles parejas divisor-resto son:

Divisor (d)	Resto (r)
9	**1**
8	**5**

las cuales generan las siguientes divisiones

$$\begin{array}{r|l} 37 & 9 \\ \hline 1 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & 8 \\ \hline 5 & 4 \end{array}$$

3. Fijamos el Dividendo y el resto

$$\begin{array}{r|l} 37 & d \\ \hline 1 & c \end{array} \qquad 37 = d \times c + r$$

Como el resto debe ser menor que el divisor, en este ejemplo el divisor tiene que ser un número natural mayor que uno. Cabe preguntarse, entonces, si el conjunto de divisores estará o no acotado superiormente, ¿existirá un divisor que sea el "más grande" de todos?

Es de destacar que plantear la división entera de este ejemplo equivale a plantear la división exacta 36 = d x c, por lo que resultaría más fácil confeccionar una tabla con los posibles divisores y sus correspondientes cocientes para intentar responder a la pregunta que nos hemos formulado.

Divisor (d)	Cociente (c)
2	18
3	12
4	9
~~5~~	-
6	6
~~7~~	-
~~8~~	-
9	4
~~10~~	-
~~11~~	-
12	3
~~13~~	-
~~14~~	-
~~15~~	-
~~16~~	-
~~17~~	-
18	2
36	1

Al observar la tabla concluimos que el menor divisor que podemos considerar es el 2 y que el máximo divisor posible es el 36. Los posibles divisores para la división planteada inicialmente son: 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36.

4. Fijamos el divisor y el cociente

$$\begin{array}{l|l} D & 4 \\ \hline r & 9 \end{array} \qquad D = 4 \times 9 + r \qquad r < 4$$

En este caso surge una primera dependencia a destacar, que es la que existe entre el resto (r) y el cociente fijado en el ejemplo (4). Los restos posibles serían 0, 1, 2 y 3.

A su vez se evidencia una relación de dependencia posterior, que es la que existe entre el resto y el Dividendo. Una vez que consideramos un posible resto, este determina, junto al cociente fijado, el correspondiente valor del Dividendo. Veamos esta relación en la siguiente tabla:

Resto (r)	Dividendo (D)
0	36
1	37
2	38
3	39

En las divisiones que hemos analizado hasta el momento, el conjunto solución es finito; en cada una de ellas podemos encontrar una cantidad determinada de soluciones. Esto vuelve a ocurrir en esta nueva división donde podríamos plantear cuatro posibilidades:

$$\begin{array}{r|l} 36 & \underline{\;9\;\;} \\ 0 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & \underline{\;9\;\;} \\ 1 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 38 & \underline{\;9\;\;} \\ 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 39 & \underline{\;9\;\;} \\ 3 & 4 \end{array}$$

5. Fijamos el divisor y el resto

$$\begin{array}{r|l} D & \underline{\;4\;\;} \\ 1 & c \end{array} \qquad D = 4 \times c + 1$$

En esta división, para obtener el Dividendo, lo único que debemos hacer es multiplicar por cuatro al cociente y luego sumar uno. El cociente es, por lo tanto, independiente del divisor y resto conocidos, no existe ninguna restricción para dicho número, por lo que, en este caso, podríamos plantear infinitas divisiones.

Fijando el divisor y el resto, son infinitas las parejas Dividendo-cociente que podemos considerar.

Construyamos una tabla con algunas de estas infinitas soluciones, para observar si las mismas presentan alguna característica a destacar.

Cociente (c)	Dividendo (D)
0	1
1	5
2	9
3	13
4	17
5	21
6	25
7	29
8	33
9	37
...	...

Al ir variando el cociente, se van obteniendo valores para el Dividendo con ciertas particularidades:

- Todos los Dividendos son impares.
- Existe una regularidad en la cifra de las unidades de la lista de Dividendos obtenidos. Ellas se repiten en el ciclo: 1-5-9-3-7 particularidad que se sustenta en la observación siguiente.
- Si pensamos en la sucesión ordenada de los múltiplos de cuatro: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36,... los dividendos obtenidos difieren en uno con cada uno de los múltiplos mencionados:

Múltiplos de cuatro	0	4	8	12	16	20	24	28	32	...
Dividendos	1	5	9	13	17	21	25	29	33	...

Esta regularidad no tendría que sorprendernos si pensamos en la definición de la división entera.

En este ejemplo:

D = 4 x c + 1; el Dividendo se obtiene multiplicando al cociente por cuatro (es decir, obteniendo un múltiplo de cuatro) y luego sumándole uno.

6. Fijamos el cociente y el resto

$$\begin{array}{r|l} D & \underline{\;d\;\;} \\ 1 & 9 \end{array} \qquad D = d \times 9 + 1$$

En esta división, en la cual conocemos el valor del cociente (9) y del resto (1), es de destacar una primera dependencia que se da entre el divisor y el resto: el divisor tiene que ser mayor que uno.

Una vez tenida en cuenta esta restricción "por abajo" del divisor, podemos comparar este caso con el anterior (donde conocíamos el divisor y el resto) en el sentido que, en este ejemplo, nuevamente para obtener el Dividendo tenemos que multiplicar un número conocido (9) por otro que es variable y al resultado sumarle uno.

Nuevamente obtenemos infinitos valores para el Dividendo, uno por cada divisor mayor que uno que consideremos.

Veamos algunos casos con el objetivo de detectar alguna particularidad en ellos.

Divisor (d)	Cociente (c)
2	19
3	28
4	37
5	46
6	55
7	64
8	73
9	82
10	91
11	100
12	109
13	118
...	...

- La cifra de las unidades de los sucesivos Dividendos se repiten en un ciclo de diez cifras, respetando el siguiente orden: 9-8-7-6-5-4-3-2-1-0.
- En la división que estamos planteando, el Dividendo se obtiene multiplicando un número por nueve (obteniendo entonces un múltiplo de nueve) y al producto obtenido se le suma uno. En estas divisiones, todos los Dividendos difieren en una unidad de los sucesivos múltiplos de nueve:

Múltiplos de nueve	0	9	18	27	36	45	54	63	72	...
Dividendos	**1**	**10**	**19**	**28**	**37**	**46**	**55**	**64**	**73**	**...**

Decíamos al comienzo de este artículo que el análisis de la división que nos proponíamos realizar, y que hemos concluido, al ir variando los elementos de esta operación, apuntaba a trabajar la división como objeto de estudio. Este abordaje brindaría al maestro algunas pistas para poder pensar actividades que sean potentes y pertinentes para el curso del cual cada uno es responsable.

En el tercer ciclo de la escolaridad es esperable que los alumnos trabajen diferentes situaciones donde la división se aborde desde sus distintos significados; es también esperable que se generen actividades donde la relación Dividendo-divisor-cociente-resto sea nuevamente problematizada. De esta manera, las actividades estarían exigiendo al alumno anticipar resultados y controlar los que va obteniendo.

Dicen los didactas que un alumno no estaría haciendo Matemática si no resuelve problemas y reflexiona sobre ellos.

En las prácticas habituales del último ciclo de la escolaridad, el maestro intenta variar las actividades que tienen a la división como objetivo. Por lo general, esta variación se basa casi exclusivamente en cambiar el tipo de números que intervienen, se trabaja con números "grandes" y se enfatiza en el conjunto de los números racionales.

Es intención de este artículo aportar, a los maestros, elementos para reflexionar sobre esta operación como objeto de estudio y así luego poder problematizarla en situaciones de enseñanza.

Bibliografía

BRESSAN, Ana María (1998): "La división por dos cifras: ¿un mito escolar?". Consejo Provincial de Educación de Río Negro, documento de la Secretaría Técnica de Gestión Curricular, área Matemática.

Disponible en www.educacion.rionegro.gov.ar

BROITMAN, Claudia (2005): "Estrategias de cálculo con números naturales. Segundo Ciclo EGB". Buenos Aires: Ed. Santillana.

BROITMAN, Claudia e ITZCOVICH, Horacio (2001): "Orientaciones didácticas para la enseñanza de la división en los tres ciclos de la EGB". Documento N° 2. Buenos Aires: Subsecretaría de Educación.

CHEMELLO, Graciela (1998): "El cálculo en la escuela: Las cuentas, ¿son un problema?" en Gustavo Iaies (comp.): *Los CBC y la enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires: AZ Editora.

KAMII, Constance (1995): *Reinventando la aritmética III: Implicaciones de la Teoría de Piaget*. Madrid: Ed. Aprendizaje Visor.

MARTÍNEZ, P.; MORENO, E. (1996): "Aprendiendo a dividir" en *Básica. Revista de la escuela y del maestro*, N° 11. México: Fundación SNTE para la Cultura del Maestro Mexicano.

RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz (2005): "De las operaciones... ¿qué podemos enseñar?" en Beatriz Rodríguez Rava y Ma. Alicia Xavier de Mello (comps.): *El Quehacer Matemático en la Escuela. Construcción colectiva de docentes uruguayos*. Montevideo: FUM-TEP - Fondo Editorial QUEDUCA, pp. 130-150.

SADOVSKY, Patricia (1999): "La enseñanza de la división" en *Revista QUEHACER EDUCATIVO* N° 36 (Julio), pp. 35-42. Montevideo: FUM-TEP.