A la hora de planificar, ¿por qué elaborar secuencias de enseñanza?

María del Carmen Curti | Liliana Pazos | Maestras. Formadoras de maestros en Enseñanza de la Matemática.
Integrantes del Equipo de Investigación e Innovación en Enseñanza de la Matemática de la revista *QUEHACER EDUCATIVO*.

«No hay viento favorable
para el que no sabe hacia donde va.»
Séneca

La enseñanza de un contenido matemático enfrenta a los docentes a la necesidad de tomar numerosas decisiones, que ponen de manifiesto sus concepciones respecto a todos los aspectos que se entrelazan durante el proceso de enseñanza.

Estas decisiones forman parte del análisis didáctico que involucra una gestión del conocimiento desde el mismo momento en que se determina cuál es el contenido que se pretende enseñar.

Al considerar que la forma más adecuada para promover la enseñanza de un determinado contenido es organizar secuencias, se aceptan de manera más o menos implícita, algunas concepciones acerca de la matemática y de su enseñanza. Esta opción expone un enfoque sobre la disciplina y su enseñanza, en consonancia con los procesos de aprendizaje.

Implica reconocer a la matemática como una organización de conceptos que no están aislados, que se entraman en una red de vinculaciones que les otorgan significado y garantizan su coherencia interna.

Supone aceptar, por lo tanto, la complejidad del conocimiento matemático, la necesidad de numerosas miradas desde diferentes aspectos para que los alumnos puedan construir el sentido de los conceptos en los términos planteados por Brousseau (en Charnay, 1994), es decir, su potencial y su limitación en cuanto herramienta de resolución de problemas. Y sostener, además, la idea de que un concepto matemático no se encuentra aislado, sino que forma parte de un entramado de relaciones cuyo reconocimiento y cuya comprensión son condiciones para la construcción de sentido mencionada.

Si bien el desarrollo cognitivo de los niños condiciona la apropiación de algunas relaciones, acercarse a las mismas, ponerlas a prueba para validarlas o rechazarlas, es lo que construirá el sentido de los conocimientos para los alumnos. Ello hace necesaria la reiterada interacción con el objeto de conocimiento en sucesivas aproximaciones que permitan su exploración desde variadas miradas y diferentes problemas.

Estamos utilizando "significado" y "sentido" en las acepciones que plantea Brousseau (en Charnay, 1994); entendiendo por *significado*, las situaciones que integran el conjunto de problemas para cuya resolución el concepto matemático que se pretende enseñar es la herramienta óptima, y por *sentido*, el proceso de construcción interna del alumno en el cual se reconocen y comprenden las propiedades, relaciones, la potencialidad y las limitaciones del concepto en cuestión.

«La matemática permite producir conocimientos sobre una porción de la realidad a través de sus teorías. Brindar a los chicos y a los jóvenes en la escuela la oportunidad de inventar estrategias para resolver problemas, de discutir sobre la validez de un procedimiento o de un enunciado, de analizar diferentes maneras de encarar una cuestión, de encadenar deductivamente relaciones para producir nuevas relaciones, de elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos constituyen actividades altamente formativas, ya que ofrecen la posibilidad de apreciar hasta qué punto el trabajo con las ideas ayuda a cambiar la visión que tenemos de las cosas. [...]
Esas estrategias tal vez no sean de entrada las que el docente espera, pero discutir sobre ellas es un modo de llegar a las que se busca que aparezcan en la clase. El desafío intelectual tiene algunos componentes parecidos a los del juego, en el sentido de la tensión que genera y el deseo de vencer una resistencia. Pero en la enseñanza de la disciplina en la escuela, el objetivo es una cierta construcción teórica, esto implica relacionar las ideas entre sí, jerarquizarlas, establecer sus límites.» (P. Sadovsky en Martyniuk, 2010)

Vergnaud (1990) afirma que no es posible hablar de un concepto, sino de campos conceptuales en los que intervienen las situaciones de las que son herramientas de solución, los invariantes propios del mismo y las formas de representación, lingüísticas o de otra índole: gráficas, icónicas, etc. Por lo tanto es necesario presentar a los alumnos la mayor cantidad posible de situaciones de ese campo conceptual en toda su complejidad y teniendo en cuenta todas las relaciones que conlleva.

Desde el punto de vista del aprendizaje y de su implicancia en la enseñanza estamos considerando, al mismo tiempo, la complejidad y la provisoriedad del conocimiento; los conceptos no se aprenden de una vez y para siempre, su apropiación requiere que los alumnos tengan oportunidades de resolver problemas que vayan recorriendo la complejidad a través de sus diferentes aspectos. Poder reconocer las vinculaciones hace necesario proponer actividades o situaciones que no refieran directamente al concepto que se quiere enseñar, pero que son imprescindibles para seguir avanzando en su construcción a partir de la discusión de las producciones personales o grupales.

De acuerdo con esta mirada puede pensarse que una vez seleccionado el contenido a enseñar, es necesario analizarlo matemáticamente "desagregando" los aspectos que lo integran, sus relaciones y la de estos con otros contenidos. Para cada uno de estos aspectos deberían desarrollarse una serie de actividades que, si bien podrán pensarse con antelación, deberán ir ajustándose en la medida en que la puesta en aula y la discusión de procedimientos y resultados vaya dando insumos para una replanificación que permita revisitar, revisar, reinvertir, tratar algún prerrequisito no detectado, etc.

«La matemática es una producción social. Esto significa que las respuestas que producen unos dan lugar a nuevos problemas que plantean otros. Es interesante retomar este rasgo para la clase y promover el trabajo intelectual cooperativo que siempre es más potente porque se nutre de muchas perspectivas diferentes. Lo que pensaron unos confirma, cuestiona, modifica o rebate lo que pensaron otros. Debatir con los compañeros apoyándose en el conocimiento da lugar a una práctica profundamente democrática. La matemática pone a los chicos en contacto con mecanismos de pensar y producir que son formativos también por la posibilidad de pensar con otros. Pensar con otros nos hace mejores personas también.» (*ibid.*)

Todos estos supuestos no se explicitan al momento de diseñar una secuencia de actividades para enseñar algún contenido matemático, pero es importante ser consciente de que, como en toda gestión docente, ninguna decisión es inocua y tiene un sustento teórico implícito aunque no se lo reconozca.

En esta oportunidad consideramos compartir una secuencia de actividades para el trabajo con triángulos, a desarrollar a lo largo de todo el ciclo escolar.

La enseñanza de conceptos geométricos, especialmente de las propiedades de los mismos, requiere integrar secuencias de largo alcance, donde se intercalan otras más puntuales para algún aspecto particular. Ello permite a los alumnos ir construyendo las propiedades que los caracterizan, descentrando el enfoque de los aspectos perceptivos. Las representaciones cumplen la función de apoyo para pensar sobre objetos que no tienen existencia real.

En el caso de las propiedades de los triángulos como un tipo de polígonos, implica haber recorrido los conceptos de polígonos y no polígonos, segmentos en cuanto lados, vértice como punto de intersección de segmentos, por citar algunos sin establecer ningún orden de prelación.

La siguiente secuencia exige además otra previa o paralela, donde se construya el uso del compás como instrumento para trasladar distancias y los conceptos de circunferencia y círculo como lugares geométricos. En este sentido puede consultarse *Matemática. Documento de trabajo Nº 5* (Sadovsky y otros, 1998).

La misma servirá como fundamento para que los alumnos se apropien del algoritmo de construcción de triángulos, justificándolo por sus relaciones con las circunferencias cuyos radios son los lados del triángulo, y no lo hagan por repetición mecánica de un algoritmo sin comprender las relaciones interfigurales que están en juego.

Se pueden consultar, además, los artículos "Aprender Geometría a través de las construcciones" y "Problematizar la Geometría", de Lucía Brusa, en *QUEHACER EDUCATIVO*, Nº 115 y 117 respectivamente.

Esta secuencia consta de una serie de actividades en las que podemos organizar grupos en relación a las propiedades de los triángulos que se pretende trabajar. Cada grupo busca plantear una "actividad madre" que constituya el primer problema que permita la interacción del alumno con el aspecto a abordar, seguida de otras actividades que amplían, reinvierten, plantean limitaciones, etc.

- El primer grupo de actividades tiene por objetivo poner en evidencia las **propiedades esenciales de los triángulos** en cuanto polígonos de tres lados y la relación "a mayor lado le corresponde mayor ángulo". En este sentido, el objetivo es centrar la atención de los alumnos en los ángulos de la figura, además de las características de los lados que es el aspecto más frecuentado generalmente.

Actividad 1
Dado un segmento dibujado, construir un triángulo usando dos varillas como los otros lados. "Calcarlo".

En esta actividad se propone a los niños determinar un triángulo a partir de un lado dado, el segmento dibujado y los otros dos representados por varillas que ellos deben colocar de forma de obtener un triángulo para luego calcarlo. Están en juego, por tanto, las propiedades del triángulo como un polígono único dados los tres lados.

Podría ser interesante la comparación de lo que sucede con polígonos de más de tres lados, ya que con las varillas seleccionadas pueden construirse infinitos polígonos cambiando la amplitud de sus ángulos mientras que el triángulo es único, para lo cual se propone más adelante una actividad específica (*1b*).

Actividad 2
En el triángulo "calcado" en la Actividad 1:
- *Cambiar una de las varillas por otra más larga. "Calcarlo". Observar la variación del ángulo.*
- *Cambiar una de las varillas por otra más corta. "Calcarlo". Observar la variación del ángulo.*

Esta actividad se propone explorar las relaciones entre lado y ángulo al modificar la longitud de uno de los lados y las variaciones que este cambio ocasiona en la figura. **A lado mayor, ángulo mayor.**

> *Actividad 3*
> *Dada la medida de los tres lados y los tres ángulos de un triángulo, colocar en su orden las letras correspondientes.*

Esta última actividad del grupo reinvierte lo trabajado en el mismo.

- Este nuevo grupo tiene como objetivo la **construcción del triángulo con compás** justificándolo por la circunferencia como lugar geométrico.

> *Actividad 1a*
> *Dar un segmento trazado y 2 varillas. Determinar el tercer vértice usando una varilla por vez.*

Esta actividad avanza sobre la *Actividad 1* al condicionar el uso de las varillas; deben ser usadas una por vez, aparecerá la necesidad de "ir modificando" la ubicación del tercer vértice para encontrar el punto de corte. Con ello, los alumnos irán determinando, por ensayo y error, puntos de circunferencias de radio igual al lado con centro en cada uno de los extremos del segmento dado.

> *Actividad 2a*
> *Reinversión: trazar un triángulo a partir de tres segmentos usando regla de bordes paralelos y compás.*

Esta actividad reinvierte lo trabajado en el bloque previo en relación al uso del compás para el algoritmo de trazado de triángulos.

- El siguiente grupo de actividades tiene como objetivo que los niños lleguen a la conclusión de que no son suficientes tres segmentos para obtener un triángulo. **Condición de existencia.**

> *Actividad 3a*
> *Dado un segmento, armar el triángulo con dos varillas dadas.*

Se entregarán dos varillas para que la construcción no sea posible, poniendo en evidencia que no siempre se puede construir un triángulo con tres segmentos cualesquiera.

Como lo establece la propia actividad, se trata de poner en duda la posibilidad de armar siempre un triángulo cuando se tienen tres segmentos.

> *Actividad 4a*
> *Reiterar la actividad anterior usando compás y dando segmentos que generen:*
> - *circunferencias secantes*
> - *circunferencias tangentes*
> - *circunferencias exteriores.*

Esta actividad retoma lo trabajado en la *Actividad 3a* con el compás y avanza en la medida en que los segmentos ofrecidos dan pistas al alumno sobre la relación que debe existir entre los lados de un triángulo para que sea "posible"[1] su construcción, es decir, que exista.

> *Actividad 5a*
> *Dada la medida de los lados de varios triángulos, establecer, sin trazar, cuándo es posible la construcción.*

Las relaciones numéricas entre los lados de un triángulo construidas hasta el momento deberían permitir resolver con éxito esta actividad sin necesidad de la exploración empírica.

En los dos grupos de actividades precedentes se trabajaron las **relaciones intrafigurales** y la **relación entre triángulos y circunferencia**.

- En la actividad que sigue se exploran las relaciones con otros polígonos para comprobar la **"rigidez" del triángulo** en comparación con los cuadriláteros, por ejemplo, en los que los mismos cuatro lados dan lugar a numerosos cuadriláteros diferentes.

[1] Es importante tener en cuenta que, a veces, los alumnos fuerzan el trazado y parece posible la construcción de un triángulo que, por sus medidas, no existe.

Actividad 1b
Con tres varillas articuladas, pedir que se construya más de un triángulo.

Comparar qué pasa con varillas articuladas y otros polígonos. Dar las mismas varillas a distintos grupos para armar y calcar triángulos y otros polígonos. Ver qué pasa con los triángulos y con los otros polígonos para concluir que se determina un solo triángulo.

- El siguiente grupo de actividades tiene por objetivo acercar a los niños al **concepto de semejanza** a partir de las características de los triángulos obtenidos, mostrando que mientras en la *Actividad 1c* y consecuente con todo lo trabajado en las actividades precedentes se obtiene un único triángulo, en la *Actividad 2c* hay varios triángulos que tienen la misma medida de sus ángulos.

Actividad 1c
Construir un triángulo dados los tres lados.

Actividad 2c
Construir un triángulo dados los tres ángulos.

La comparación de los trazados obtenidos en las actividades precedentes permitirá acercarse a la idea de semejanza.

- El siguiente grupo de actividades apunta a la **suma de los ángulos interiores de un triángulo**.

Actividad 1d
Con bandas elásticas y dos puntos de apoyo, construir un triángulo. "Alargar" dos de sus lados estirando la banda elástica.

Se espera que los alumnos puedan explorar qué sucede con los ángulos. Acercar el vértice a la base y observar cuándo deja de haber triángulo y se obtiene un solo ángulo de 180º.

Actividad 2d
Calcular el ángulo de un triángulo, dados los otros dos. Trazarlo.

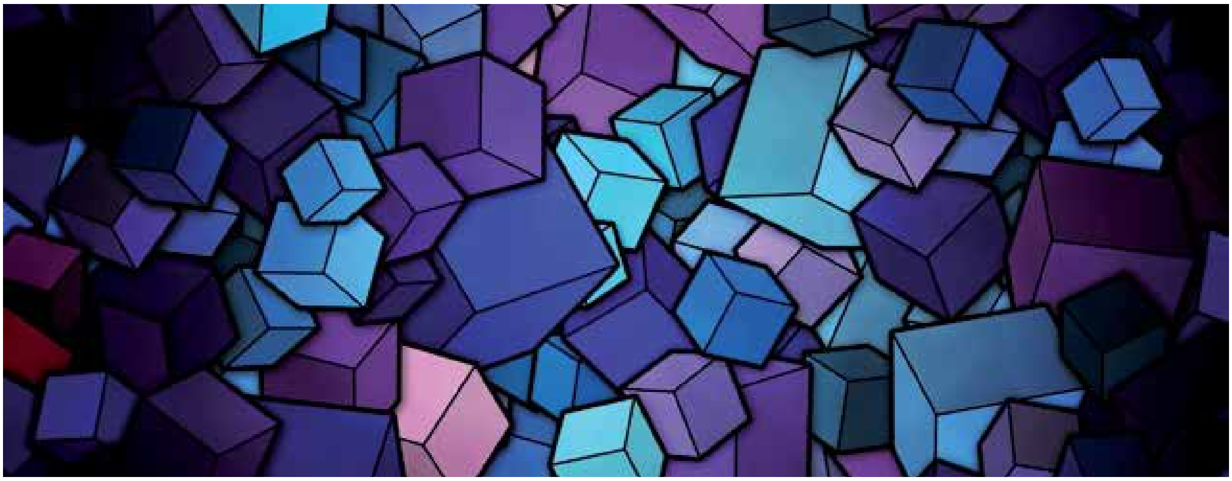
Esta actividad permitirá, además, revisitar lo que se había hecho en relación a semejanza.

Actividad 3d
Calcular, cuando sea posible, los ángulos de:
- *un triángulo equilátero*
- *un triángulo rectángulo isósceles*
- *un triángulo isósceles dado uno de ellos*
- *un triángulo obtusángulo dado uno de ellos.*

- Uno de los aspectos a trabajar que ofrece mayores dificultades en relación a los triángulos es la **relación base-altura**, y esto sucede por varios motivos. La necesidad de establecer la perpendicularidad entre altura y base, la relación del par base-altura, la idea de que hay tres alturas posibles y la confusión que se origina al trabajar mayoritariamente con triángulos isósceles en los que la altura coincide con la mediana, por lo que su pie corresponde al punto medio de la base. Por lo tanto sería necesaria una serie de actividades que presenten el tema y vuelvan sobre él varias veces.

Actividad 1e
Construir triángulos que entren "justo" en la banda que se ha pegado en el pizarrón.

Dada una banda de bordes paralelos que se pegará en el pizarrón, los alumnos deberán construir triángulos tales que uno de sus lados coincida con el borde de la banda y el vértice opuesto lo haga con un punto del borde paralelo. Es posible que los alumnos trasladen la altura de la banda como medida de uno de los lados, por lo que al colocar el triángulo, este no cumplirá con las condiciones. Es posible que, en su mayoría, recurran a la construcción de triángulos rectángulos, ya que el cateto coincide con la altura lo que les permitirá cumplir la consigna. Se deberá tener presente solicitar que se hagan todos los tipos de triángulos.

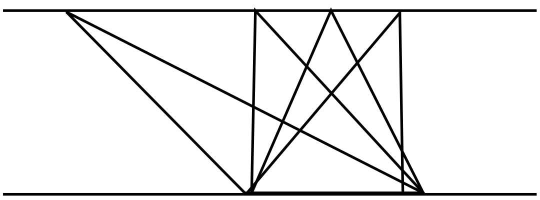


> *Actividad 2e*
> *Colocar en la banda, en otra posición, los triángulos recortados en la actividad anterior.*

La actividad permitirá acercarse a la relación base-altura y explorar las tres alturas correspondientes.

> *Actividad 3e*
> *En una banda de bordes paralelos determinar un segmento en uno de sus bordes y construir, tomándolo como lado, todos los triángulos posibles cuyo vértice opuesto sea un punto del otro borde de la banda.*

Se pretende que los alumnos logren una construcción en la que tracen triángulos de los tres tipos encontrando que, en función del pie de altura, podrán **clasificarlos**. Esta exploración permitirá establecer algunas conjeturas a partir de ejemplos puntuales que podrán irse generalizando: aquellos en los que el pie de altura sea un punto de la base, son los acutángulos; aquellos cuyo pie de altura sea un extremo del segmento base, los rectángulos; y aquellos cuyo pie de altura sea exterior al segmento base, los obtusángulos.



- Las propuestas que siguen reinvierten todo lo trabajado en la secuencia, a la vez que problematizan las clasificaciones disjuntas tan habituales en la escuela. La importancia de las mismas no radica en nominar, sino en poner en relevancia propiedades de los objetos geométricos por las cuales se los agrupa.
  Por lo tanto, estas clasificaciones deberán ser hechas por los alumnos de acuerdo a las propiedades en juego, aun cuando no coincidan con las habituales. Es una variable didáctica fundamental, el grupo de figuras que se entreguen para ser clasificadas en función de la propiedad que se pretenda abordar.

> *Clasificar:*
> - *por lados*
> - *por ángulos*
> - *por lados y ángulos*
> - *por pie de altura*
> - *por igualdad de alturas*
> - *por igualdad de medianas*
> - *y otras tantas en función de la propiedad objetivo de la actividad.*

> *Actividad de síntesis*
> *Plegar una hoja y hacer los pinchazos correspondientes como para que, al abrirla, haya quedado determinado un triángulo isósceles, un triángulo rectángulo, un equilátero, un isósceles rectángulo, etc.*

Hemos intentado proponer un recorrido por diferentes aspectos del contenido triángulos. No son todos los que podrían abordarse, pero tratamos de abonar con ejemplos concretos lo que entendemos por secuencia, la necesidad de planificar el acercamiento a distintas propiedades y de revisitarlas una y otra vez.

El orden que hemos dado a los grupos de actividades no tiene que ser necesariamente ese. Cada docente cambiará, agregará, suprimirá, seleccionará, de acuerdo a la realidad de su grupo. Lo que sí hay que tener en cuenta es que a la hora de planificar un contenido debe preverse una serie de posibles actividades para que los alumnos construyan el contenido. Esto permitirá a los alumnos acercarse a los conceptos desde la complejidad de las relaciones; y a los docentes, una planificación eficiente que posibilite una mejor utilización del tiempo de clase.

Bibliografía de referencia

BRUSA, Lucía (2012): “Aprender Geometría a través de las construcciones. Circunferencia y circulo” en *QUEHACER EDUCATIVO*, Nº 115 (Octubre), pp. 15-20. Montevideo: FUM-TEP.

BRUSA, Lucía (2013): “Problematizar la Geometría” en *QUEHACER EDUCATIVO*, Nº 117 (Febrero), pp. 16-21. Montevideo: FUM-TEP.

CHARNAY, Roland (1994): “Aprender (por medio de) la resolución de problemas” en C. Parra; I. Saiz (comps.): *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós Educador.

MARTYNIUK, Claudio (2010): “A fondo: Entrevista a la Doctora en Didáctica de la Matemática. Patricia Sadovsky: ‘La matemática es más que un jueguito de ingenio: es desafío intelectual’” en *Clarín.com*, viernes 28 de mayo. En línea: http://edant.clarin.com/suplementos/zona/2010/04/25/z-02187383.htm

SADOVSKY, Patricia; PARRA, Cecilia; ITZCOVICH, Horacio; BROITMAN, Claudia (1998): *Matemática. Documento de trabajo Nº 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*. Buenos Aires: Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula. En línea: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matemat/doc5.pdf

VERGNAUD, Gérard (1990): “La teoría de los campos conceptuales” en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3, pp. 133-170. Grenoble: La Pensée Sauvage. Traducción: Juan D. Godino. En línea: http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf