



# El azar en la matemática\*

**Karina Lombardo** | Maestra. Integrante del Equipo de Investigación en Enseñanza de la Matemática, Revista *QUEHACER EDUCATIVO*, FUM-TEP.

A diario, el azar está presente en nuestras necesidades corrientes. ¿Lloverá hoy o saldrá el sol? ¿Encontraré asiento en el ómnibus o tendré que viajar parada? ¿Ganará el domingo mi cuadro de fútbol? ¿Será una nena o un varón?

Paralelamente, el «sistema de educación tiende a dar a los niños la impresión de que para cada pregunta existe una sola respuesta sencilla y clara, que no existe nada intermedio entre lo verdadero y lo falso» (Díaz Godino y otras, 1996:12).

Para desterrar esta idea:

*«La comunidad académica matemática postula en la actualidad la importancia de dar cabida al pensamiento no determinista, considerando que toda actividad humana está asociada a niveles de incertidumbre, por lo tanto hay que tomar decisiones curriculares en relación con esto» (ANEP. CEP, 2009:63).*

Para los innumerables casos en que es imprevisible saber el resultado por adelantado, los matemáticos han desarrollado una disciplina llamada “Probabilidad”, que estudia la posible ocurrencia de un suceso particular.

Esta disciplina tiene como uno de sus objetivos, el evaluar la posibilidad de que un suceso ocurra o que no ocurra.

*«La probabilidad estudia los fenómenos cuyos resultados no tienen un resultado cierto, sino que son imprevisibles, como en el caso de tirar una moneda o un dado, y se dice que estos fenómenos obedecen las leyes del azar. [...] Es importante saber que el cálculo de probabilidad es una ayuda importante para la toma de decisiones.» (Bressan y Bressan, 2008:19)*

Siguiendo este pensamiento, E. Fischbein opina: *«En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico» (en Díaz Godino y otras, 1996:46).*

## ¿Cómo enseñar probabilidad?

Sabemos que la intuición probabilística no se desarrolla espontáneamente, es necesario “entrenarla” y ya desde los primeros niveles de la escolaridad. O sea, el azar, la probabilidad, la incertidumbre necesitan, como expresan Bressan y Bressan, *«ser repensadas desde un tratamiento matemático más exhaustivo» (Bressan y Bressan, 2008:8).*

Los docentes debemos dar a los alumnos la oportunidad de trabajar con problemas que incluyan la incertidumbre, de que recojan datos para que puedan tomar decisiones ante situaciones de azar, de que estudien las probabilidades con las que cuentan ante un hecho fortuito.

\* Trabajo elaborado a partir de una tarea del Curso III – Apoyo a la Enseñanza de la Matemática en las Escuelas de Tiempo Completo (2011).

La influencia de todos estos sucesos de su vida «*va instalando en la mente del niño la idea de que hay experimentos para los cuales no es posible decir, con toda seguridad, lo que se va a verificar*» (Vecino Rubio, 2003:343). Nuestros niños se enfrentan entonces, desde muy pequeños, con una realidad regida, en muchos casos, por las leyes del azar.

Para introducir a los niños en el estudio del pensamiento probabilístico, el *Programa de Educación Inicial y Primaria. Año 2008*, en el Área del Conocimiento Matemático, subárea “Probabilidad”, propone como contenido para Primer grado: “Los experimentos aleatorios”.

### ¿Qué es un experimento aleatorio?

Villella lo define como «*cualquier experiencia susceptible de ser repetida a voluntad en condiciones análogas, con la condición de que el resultado de la misma sea impredecible antes de cada repetición*» (Villella, 2010:58).

Por su parte, Fripp y Rodríguez Rava explican que los experimentos aleatorios «*son hechos que suceden como consecuencia de circunstancias que no se pueden prever ni evitar*» (Fripp y Rodríguez Rava, 2010:6).

Fenómenos aleatorios son los que pueden dar lugar a varios resultados, sin que pueda ser previsible enunciar con certeza cuál de estos va a ser observado en la realización del experimento.

Como podemos inferir de estas definiciones, la noción de experiencia aleatoria está ligada con la de azar, con lo incierto, es lo que depende de la “suerte”.

Una experiencia es de azar si no se puede predecir el resultado. Un experimento o fenómeno es aleatorio o estocástico cuando al repetir el experimento en igualdad de condiciones los resultados varían, a pesar de mantener constantes las condiciones con las que se realiza el experimento.

Vemos entonces que en todo experimento aleatorio el resultado es imprevisible, por ejemplo, al tirar una moneda puede salir número (el valor de dicha moneda) o animal (si es de edición nueva); dejemos de lado, obviamente, la posibilidad de que caiga de canto.

Se trata entonces, desde la escuela, de hacer conscientes a los niños y niñas de la naturaleza probabilística de los distintos juegos de azar.

Pero psicológicamente, ¿el niño, la niña, en edad escolar, están preparados para ello? Piaget explicaba que antes de los 7 años, el niño no comprendía la naturaleza irreversible de la mezcla aleatoria y esto le impide apreciar el azar.

Sin embargo, Fischbein opina que la intuición primaria del azar (la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista) está presente en la conducta diaria de cada niño, incluso antes de los 7 años. El azar es equivalente a impredecibilidad; y cuando el número de posibilidades es pequeño, el niño de los primeros años escolares razona correctamente. Este niño (menor a 7 años) puede hacer juicios probabilísticos en el sentido de una estimación intuitiva de posibilidades a favor de algún suceso.

No olvidemos que antes de llegar a la escuela, los niños ya reciben la influencia del entorno social donde el azar está presente: juegos de mesa (que involucran dados, naipes, etc.), resultados deportivos (de su cuadro favorito), el estado del tiempo (del día de su cumpleaños que, si estuviera lloviendo, le suspendería los juegos inflables), etc.

Cada vez que tiramos esa moneda, ambas posibilidades tienen la misma oportunidad de salir, eso nos está hablando de que estamos ante un experimento azaroso equitativo. Como lo definen Bressan y Bressan, equitativo: que no privilegia ni perjudica a ninguno.

Cuando dicen “a ninguno” se refieren a los sucesos. O sea, llamamos *suceso* a cualquier hecho que pueda ocurrir en un experimento aleatorio, pero los autores argentinos mencionados anteriormente definen suceso como «*en particular el resultado de un proceso aleatorio*» (Bressan y Bressan, 2008:42).

### ¿Cómo trabajar en el aula los experimentos aleatorios?

Para trabajar el carácter aleatorio de un fenómeno en el aula, Glaymann y Varga (1975) recomiendan la experimentación. Se busca familiarizar al niño con el mundo probabilístico y esto consiste en una amplia experimentación, manipulando material variado (dados, monedas, bolas, etc.). Cada experiencia se repite muchas veces en las mismas condiciones, y luego se les propone a los niños que traten de adivinar el resultado con el objeto de que capten las propiedades inherentes a los fenómenos aleatorios.

Para comenzar a incursionar en el tema experimentos aleatorios, proponemos el uso de tres tipos de materiales que podemos encontrar en las escuelas: dados, monedas y discos de colores. Estos materiales los consideramos personalmente apropiados para trabajar en Primer grado, ya que el número de posibilidades no es muy amplio: dos posibilidades en la moneda, seis en el dado, y en el disco de colores depende de la cantidad de colores que se usen; en las actividades propuestas acá será de tres posibilidades. Este control que ejercemos sobre el número de posibilidades se debe a lo expresado por Fischbein en la primera parte del trabajo, al mencionar que el número de posibilidades debe ser pequeño para que el niño de los primeros años escolares entienda lo que está trabajando.

Debemos centrar la atención en que la propuesta de juego sea simple y ágil, pero a la vez nos brinde insumos para remarcar siempre las características de lo que se está trabajando: los experimentos aleatorios.

Y en este punto, Laura Dodino nos enriquece al describir las características de un experimento aleatorio:

- ▶ *El experimento se puede repetir indefinidamente bajo las mismas condiciones controladas, pudiéndose obtener resultados distintos en cada una de las pruebas realizadas (...)*
- ▶ *El resultado de cada prueba pertenece al espacio muestral.*
- ▶ *(...) antes de realizar una prueba del experimento no se puede predecir el resultado que se obtendrá. (Dodino, 2009:63-64)*

### Actividades propuestas

Estas actividades son meramente ilustrativas de lo que se puede proponer para trabajar los experimentos aleatorios. Seguramente encontrarán variados materiales y enriquecerán las consignas a medida que conozcan más del tema.

#### 1) Con dados de constelaciones - clásico (1 al 6)

Estas actividades se proponen para resolver en forma individual.

- a) Consigna: cada alumno tira su dado por diez oportunidades y cada vez registra qué número obtuvo.

Tiradas	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
Número obtenido										

Analizar:

- ▶ ¿Qué pasó en las tiradas? ¿Qué números salieron? ¿Salió siempre el mismo?
- ▶ Observar y discutir los números que sí podían salir, los números que no podían salir y lo incierto de cada tirada.

Se busca simplemente un primer contacto con la idea de qué ocurre si tiro el dado una, dos... diez veces: no poder determinar claramente qué números salen y en el orden en que lo hacen.

- b) Consigna: elegir un número que te guste entre el 1 al 6. Anotarlo. Tirar diez veces el dado pero solo se debe hacer una marca cuando sale el número elegido.

Comentar:

- ▶ ¿Qué le sucedió a cada alumno? ¿Siempre salió su número elegido?

- ▶ Marcar que los números elegidos por ellos estaban dentro de los que tiene el dado (espacio muestral).
- ▶ Ver como en cada tirada, y a pesar de nuestro deseo, todos los números del 1 al 6 tenían la misma chance de salir.

- c) Consigna: contesta SÍ o NO.  
Para evaluar lo trabajado y qué es lo que se ha comprendido hasta ahora, podemos proponer, por ejemplo, el siguiente cuestionario:

“Tiro el dado:

- ▶ ¿Puedo sacar un 5? .....
- ▶ ¿Puedo sacar un 7? .....
- ▶ Saqué un 3, vuelvo a tirar, ¿puedo sacar otro 3? .....

Socializar partiendo de las respuestas obtenidas:

- ▶ ¿Por qué era posible sacar un 5?
  - ▶ ¿Por qué era imposible que saliera un 7?
- Partiendo del espacio muestral que tiene un dado, ir trabajando las ideas de posible e imposible.

## 2) Con monedas (de \$ 5)<sup>1</sup>

Estas actividades se proponen para resolver en dúos.

- a) Consigna: toma la moneda, y entre tú y tu compañero decidan quién toma cara (o animal si la moneda es de la nueva edición) y quién número.

Cada vez que tiren la moneda y salga lo que tú elegiste, avanzas un lugar; cuando sale lo opuesto, avanza un lugar tu compañero.

El primero que llega al final de la pista, gana.

Los avances se marcan con una “x” o el nombre de cada niño en su pista.

### Cara o animal (según el año de la moneda)



### Número



Terminado el tiempo podemos recorrer el siguiente camino, partiendo de lo empezado a trabajar en la secuencia anterior:

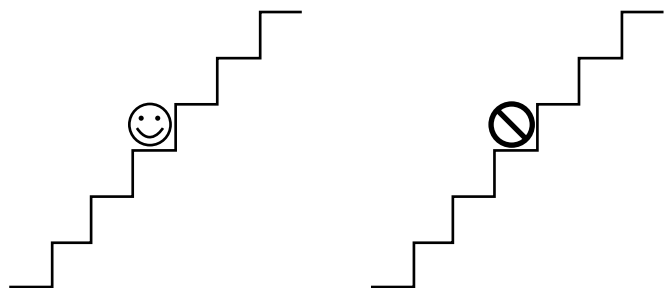
- ▶ Cada dupla cuenta cómo les fue.
- ▶ Buscamos responder: ¿Qué era posible que saliera en cada tirada? ¿Era posible saber qué iba a salir en cada tirada?

Se usarán ahora dos monedas (ambas de la misma generación, o sea, ambas con cara o con animal).

- b) Consigna: deben decidir entre tu compañero y tú nuevamente entre cara (animal) o número.

Al tirar las monedas, si sale cara en las dos, subes un escalón; si sale cara y número, o dos veces número, bajas un escalón. Si tu compañero obtiene dos números, sube un escalón; si sale número y cara, o dos veces cara, baja un escalón.

Gana el que al terminar el tiempo se encuentra más alto en la escalera.



Cara o animal

Número

<sup>1</sup> Estos dos juegos con monedas, previas algunas variaciones, fueron extraídos de Díaz Godino y otras (1996).



Tener presente:

- ▶ Qué sucedió en cada dupla.
- ▶ Destacar que en cada tirada era:
  - imposible saber qué iba a salir,
  - posible saber qué podía salir.

Con estos juegos que usan una moneda o monedas, se busca que descubran que, a pesar de que el tamaño del espacio muestral ahora es más pequeño (cara/animal y número), se cumplen las mismas características que con el dado, y que son las características propias de los fenómenos aleatorios mencionadas anteriormente al citar a Dodino (2009).

### 3) Con discos de colores (amarillo, rojo, azul)

La forma de trabajo para el juego siguiente es combinada: individual y colectiva.

Poner a la vista de los alumnos, tres discos de diferentes colores: amarillo, rojo y azul, en una bolsa opaca.

- a) Consigna: antes de cada sacada, cada alumno debe anotar en su tabla el color que desea que salga. Se sacará un disco de la bolsa y se lo mostrará. Anotar en la parte de abajo de la tabla, el color del disco obtenido. Volver a colocar el disco en la bolsa.

Repetir el juego diez veces.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Color que quiero										
Color que salió										

Analizar:

- ▶ ¿Qué le sucedió a cada uno?
- ▶ ¿Alguien siempre acertó?
- ▶ ¿Qué colores eran posibles de salir?
- ▶ ¿Después de salir el disco azul, podía volver a salir el mismo color?
- ▶ ¿Pasaba lo mismo con el amarillo? ¿Y con el rojo?
- ▶ ¿Qué color era imposible que saliera?
- ▶ Si jugáramos otra vez, ¿saldrían en el mismo orden los colores?


El siguiente trabajo se puede realizar en forma individual o dual. La idea es evaluar, después de haber realizado varias veces juegos similares al anterior.

- b) Consigna: “Si lo que dice es verdadero, escribe una V. Si lo que dice es falso, escribe una F.”

- ▶ Saqué el disco amarillo.....
- ▶ Saqué otra vez el disco amarillo.....
- ▶ Saqué el disco violeta.....
- ▶ No saqué ni una sola vez el disco verde.....
- ▶ Ya saqué el disco rojo, ahora no va a salir más el disco rojo.....

Al cerrar, remarcar que en el juego se cumplieron las características de los experimentos aleatorios:

- ▶ Se obtienen resultados distintos en cada una de las pruebas.
- ▶ Los resultados van a pertenecer al espacio muestral.
- ▶ Antes de realizar la prueba no se puede predecir el resultado que saldrá.

Estas actividades buscan que los alumnos de primer grado se acerquen a la idea de que no pueden predecir el resultado de un experimento: ni en la moneda que solo tiene dos sucesos, ni en los discos donde hay tres sucesos, ni en el dado donde encontramos seis posibilidades o sucesos; porque son fenómenos aleatorios. Con materiales diferentes, con actividades distintas, se busca vincular la probabilidad al mundo del niño. Los trabajos de experimentación individuales, en duplas y en grupos, donde se aplica el ensayo y error, son recomendados por muchos autores. 

## Bibliografía

ANEP. CEP. República Oriental del Uruguay (2009): *Programa de Educación Inicial y Primaria. Año 2008*. En línea: [http://www.cep.edu.uy/archivos/programaescolar/Programa\\_Escolar.pdf](http://www.cep.edu.uy/archivos/programaescolar/Programa_Escolar.pdf)

BRESSAN, Ana P. de; BRESSAN, Oscar (2008): *Probabilidad y estadística: cómo trabajar con niños y jóvenes. Construyendo paso a paso herramientas y conceptos*. Buenos Aires: Ed. Novedades Educativas. Colección Biblioteca Didáctica.

DÍAZ GODINO, Juan; BATANERO, María del Carmen; CAÑIZARES, María Jesús (1996): *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Ed. Síntesis.

DODINO, M. Laura (2009): “Medir la incertidumbre. Introducción al estudio de la Probabilidad” en Revista *QUEHACER EDUCATIVO*, N° 93 (Febrero), pp. 62-66. Montevideo: FUM-TEP.

FRIPP, Ariel; RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz (2010): “Cuadernillo 2 Probabilidad”. Montevideo: III Proyecto de Apoyo a la Escuela Pública. Equipo de Matemática.

RODRÍGUEZ, Milton (2003): “Tratamiento de la estadística y la probabilidad a nivel escolar” en *Curso de Actualización en la Enseñanza para Inspectores de Educación Primaria*. Montevideo: ANEP.

SILVA PALUMBO, Alicia (2009): “Como contexto para enseñar Matemática, ¿lo mejor es un juego?” en Revista *QUEHACER EDUCATIVO*, N° 96 (Agosto), pp. 24-28. Montevideo: FUM-TEP.

VECINO RUBIO, Francisco (2003): “El desarrollo del pensamiento aleatorio en Educación Primaria” (Cap. 12) en M. del C. Chamorro (coord.): *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*, pp. 329-351. Madrid: Pearson-Prentice Hall, Colección Didáctica Primaria.

VILLELLA, José (2010): *Tal vez... entre 1 y 100. El desafío de enseñar probabilidad y estadística*. Montevideo: Ed. Espartaco.