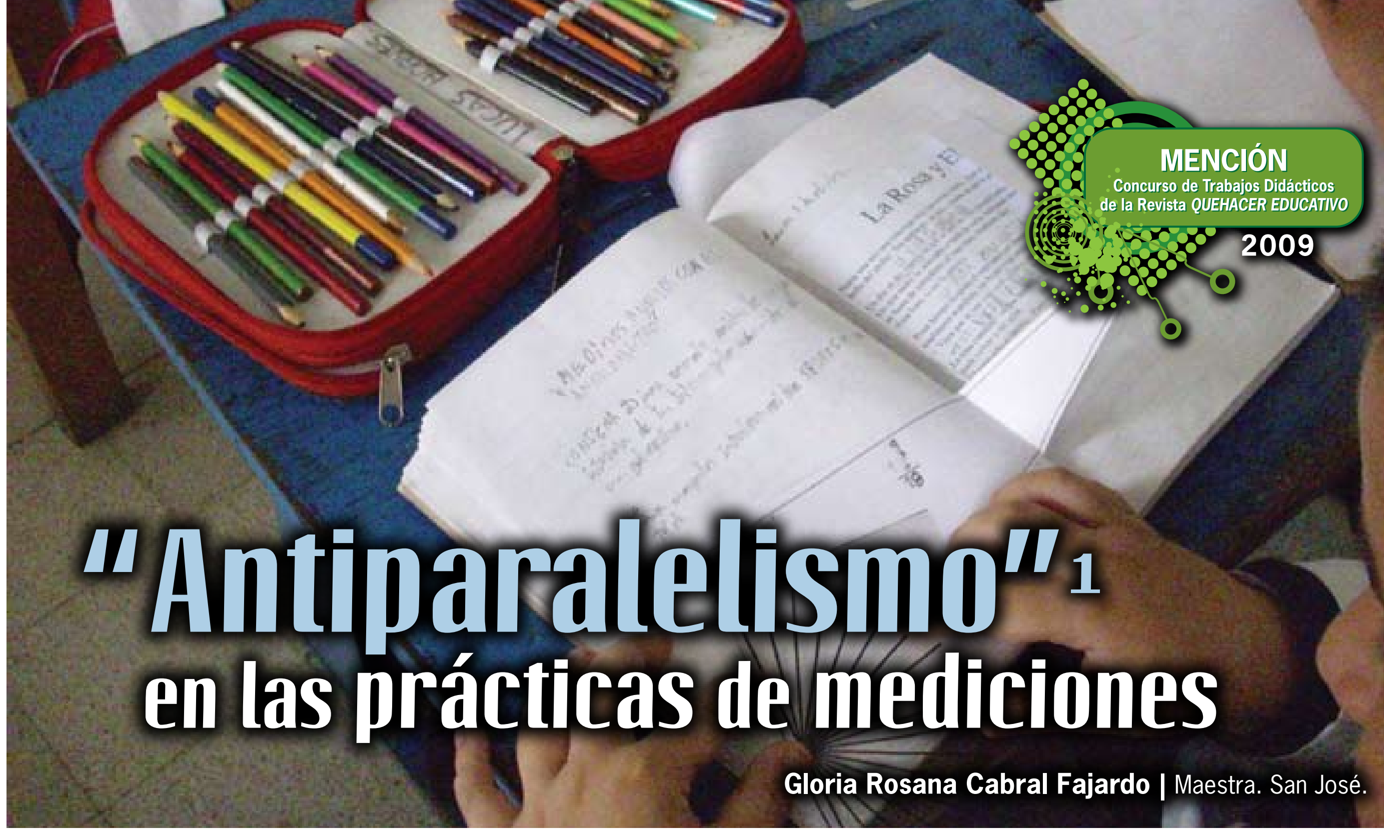

"Antiparalelismo"[1] en las prácticas de mediciones

Gloria Rosana Cabral Fajardo | Maestra. San José.

«En geometría no hay una vía directa reservada a los reyes.»
Euclides
(Tomado de *El teorema del loro. Novela para aprender matemáticas*)

Introducción

Acorde a nuestra experiencia podemos afirmar que los alumnos, tanto en la escuela como en el I.F.D., evidencian notorias dificultades en las actividades de medición de ángulos.

Podemos aventurar tres posibles y rápidas explicaciones:

1) La primera, de carácter epistemológico, refiere a la errónea idea del concepto de ángulo, inducida (amén de la intrínseca complejidad que el propio concepto conlleva) por la confusa interrelación entre el objeto (único) y sus representaciones (múltiples, con lados más largos o más cortos). Así prevalecen ideas como:
   - es mayor el ángulo que tiene los lados más largos (al referirnos a "lados más largos" estamos haciendo un abuso de lenguaje que esperamos se entienda);
   - es mayor el ángulo que tiene mayor arco dibujado (o más extensión pintada).
2) La segunda, de carácter didáctico, causada por el pasaje directo a prácticas de medición y al consiguiente uso del instrumento de medida (por excelencia, en el escuela, el semicírculo) sin realizar un necesario aprestamiento para su uso, marcando una clara distinción con otras actividades escolares de medición. Mientras que en otras prácticas de medida, por ejemplo, se promueve una familiarización usando estrategia de comparación del tipo "objeto vs. objeto" (planteada desde el mismo programa o las prácticas escolares) delineándose distintas aproximaciones al concepto puesto en juego (gradual y paulatino), esto no se insinúa (o practica) en el caso de los ángulos.
3) La última, de carácter social, provocada por la ausencia de necesidad de mediciones de ángulos en las actividades cotidianas. Quizás tampoco la matemática o las ciencias en general sean buenas proveedoras (a nivel escolar) de problemas que impliquen el uso de ángulos y sus medidas.

Ante ello proponemos una secuencia de actividades (implementada en un tercer grado de Escuela de Práctica) que consideramos puede conducir a un uso adecuado del instrumento y, por tanto, lograr una buena práctica de medición de ángulos. El fundamento básico es que la misma tenga un paralelismo con la secuencia que, por paradigmática, tiene la medición de la longitud.

[1] El concepto de "antiparalelismo" en Matemática tiene un significado muy claro, que no es el manejado en este trabajo. Nos tomamos la libertad de usarlo para enfatizar una idea.

Secuencia de actividades

Actividad I

1) Investigar si los siguientes pares de ángulos son iguales:

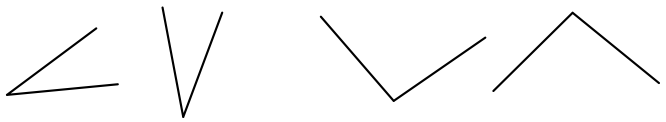

Figura 1

2) Ordenar de menor a mayor los siguientes ángulos:

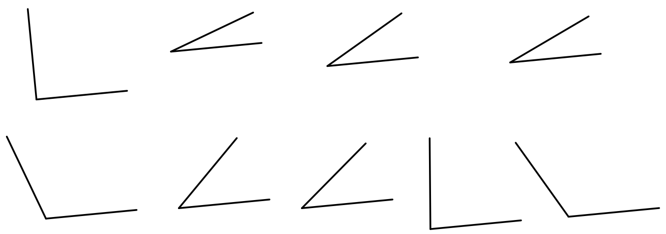

Figura 2

Objetivo: Comparar ángulos distintos o iguales con lados iguales.

En primer lugar creemos necesario señalar que Efimov (1984), al referirse a los segmentos (lo que podemos ampliar a otras figuras), habla de una relación que “denotaremos con el término *congruente*, o bien *igual*”. Queda pues saldada una fútil discusión terminológica. En lo que sigue se optará por *igual*.

Se entregarán las representaciones de los ángulos recortadas en papel, previéndose una batería de ángulos que impliquen variadas posibilidades: iguales (como en la primera actividad), grandes, muy grandes, chicos, muy chicos. Algunos serán muy similares para promover una adecuada comparación y así evitar obvios ordenamientos.

La finalidad de esta actividad es que los alumnos adquieran la idea de que la comparación de ángulos necesita de una mínima superposición y que la misma se realiza bajo dos premisas básicas: hacer coincidir vértice con vértice y hacer coincidir un lado con un lado. Así, si los segundos lados coinciden, los ángulos son iguales; caso contrario, es mayor el que sobresale, similar a lo que ocurre con la comparación de segmentos, donde se busca una primera coincidencia de extremos y luego se “ve” lo que pasa con los segundos extremos. Esto es así, ya que los segmentos se caracterizan por sus extremos en tanto que los ángulos se caracterizan por sus lados y su vértice.

Actividad II

1) Investigar si los siguientes ángulos son iguales:

Figura 3

2) Ordenar de menor a mayor los siguientes ángulos:

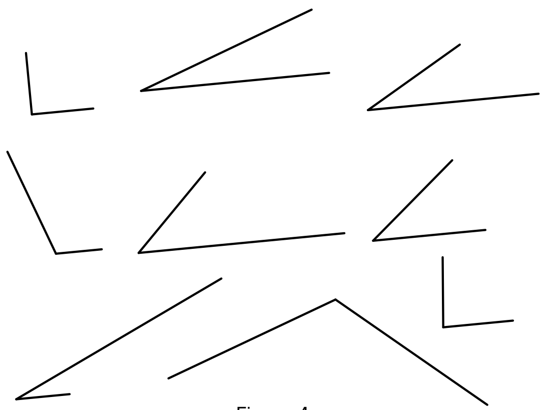

Figura 4

Objetivo: Comparar ángulos distintos o iguales con lados “distintos”.

En analogía con la actividad anterior, se entregarán representaciones de ángulos con esas características: ángulo “grande” con lados “cortos” versus ángulo “chico” con lados “largos”.

Se trata de insistir en la idea de superpoción de la Actividad I, incorporando la variable “longitud” de lado para eliminar obstáculos epistemológicos de que a lado “mayor” le corresponde ángulo mayor, y ver así que el tamaño de un ángulo no depende de que “entre” en el otro: experiencias propias nos indican que existe la idea de que, por ejemplo, el ángulo (recto) de una mesa es mayor que el ángulo (recto) de una caja: presumiblemente porque, en sus representaciones, el segundo “entra” en el primero.

Continuando con la línea argumental de vigilar la correlación con la medida de los segmentos, es claro que esta actividad es inherente a la comparación de ángulos, dadas sus múltiples representaciones: los segmentos no tendrían esta dificultad, ya que quedan inequívocamente definidos por sus extremos.

Actividad III

¿Cuántas veces entra el ángulo A en los otros ángulos?

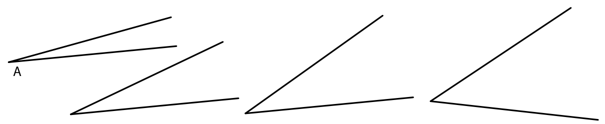

Figura 5

Objetivo: Introducir una unidad de medida no convencional, propia del grupo.

A diferencia de lo que ocurre con los segmentos, no se prevé el uso de unidades no convencionales personales: las de carácter antropométrico (aberturas de brazos o dedos) serían de difícil manejo.

Se considera que, al contrario de lo que sucede en un primer grado donde se selecciona una unidad de longitud propia, esta unidad de ángulo debe ser inducida por el docente, atendiendo a dos hechos que podrían dificultar el logro de la secuencia: se podrían elegir unidades muy grandes (lo que implicaría agotar muy rápidamente las posibilidades de medir ángulos[2]) o muy pequeñas (con las consiguientes engorrosas mediciones).

A continuación se verificarán las veces que “entra” el ángulo A en los ángulos propuestos, llegándose a los valores 2, 3 y 4. Este proceso implicará hacer las “rayitas” (ver Figura 6) por iteración del uso de la unidad. Es lo que sucede con la “regla” al medir longitudes mayores a la que ella nos permite: vamos haciendo marcas donde termina la regla. En el caso de las longitudes, estas marcas representan vértices (puntos). En el caso de los ángulos, las marcas deben representar semirrectas: se dibujará un lado.

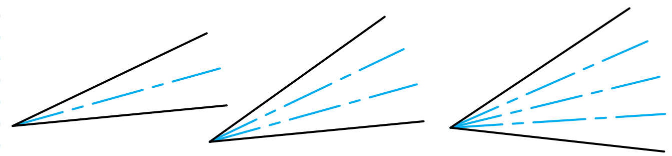

Figura 6

Llegado a este punto se institucionalizará el concepto, similar a lo acontecido con las mediciones de longitud, de medición de ángulos a partir de una unidad que será adoptada en las actividades subsiguientes.

[2] Dada la finitud de los objetos a medir, el ángulo completo es el mayor ángulo. Por ejemplo, de tomarse como unidad el ángulo recto, podríamos tomar solo cuatro medidas, ocho si mide 45º (sexagesimal) y doce si mide 30º. Esta limitación no la tienen los segmentos. Para facilitar el posterior manejo de medidas proponemos una unidad que mida 5º, 10º o 15º. De medir 20º o 25º, no tendríamos una medida entera para el ángulo recto. En el grupo se trabajó con la unidad de 10º, la cual nos llevó, por ejemplo, a que las medidas del ángulo llano y del ángulo recto valgan, respectivamente, 18u y 9u, lo que facilitaría el pasaje a las convencionales medidas de 180º y 90º.

Actividad IV

Medir los siguientes ángulos.

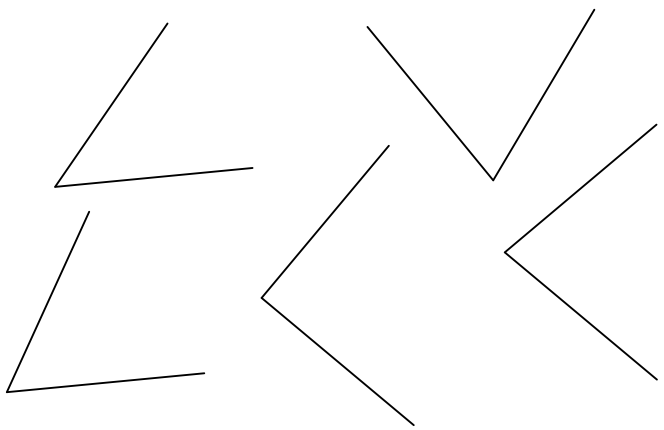

Figura 7

Objetivo: Medir ángulos usando la unidad.

En principio, los alumnos actuarán libremente: probablemente usarán la unidad para llevar a cabo las mediciones. En esta eventualidad se podría sugerir la utilización de los otros ángulos conocidos (2, 3 y 4 de Figura 6). Posteriormente se limitarán las mediciones al uso exclusivo del ángulo que mide 4 unidades, visualizando que es posible medir todos los ángulos (mayores y menores) usando el mismo. Reconocer la comodidad de usarlo para medir ángulos, por lo que se adoptará como "regla para medir ángulos" (un nuevo abuso de lenguaje). Se deberá tener cuidado, en lo sucesivo, con respecto a que los ángulos a medir tengan lados más "largos" que los de la regla: lados cortos implica realizar un "estiramiento" de los mismos, que no sería pertinente introducir en esta secuencia (dificultad a corregir en secuencias futuras).

En el grupo en el que se llevó a cabo la actividad, los alumnos denominaron a esta "regla" como *"angulómetro"*, y *"ortem"* (metro al revés) a la unidad. Respetuosos, mantenemos estas denominaciones.

Actividad V

Medir los ángulos interiores de un triángulo. Calcular la suma de las medidas obtenidas.

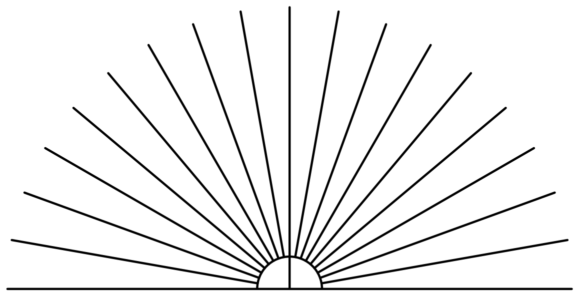

Figura 8

Objetivo: Realizar mediciones efectivas de ángulos. Concomitantemente reconocer que la suma de los ángulos internos de un triángulo es constante.

Para llevar a cabo esta actividad se entregará una amplia variedad de representaciones de triángulos (una distinta para cada alumno), cuidando que las medidas de los ángulos sean números enteros.

En esta instancia se concluirá que la suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 18 *ortem* (unidad de medida del grupo), independientemente de su "forma" y de su "tamaño". Se les propondrá, entonces, que dibujen el ángulo que mida 18 *ortem* y a partir de ello comentar la singularidad de ese ángulo, llamado llano.

Atendiendo a dicha representación, se presentará un nuevo *angulómetro* de 18 *ortem* para medir ángulos. En clase se presentó la dificultad de ver el vértice del nuevo *angulómetro*, porque la confluencia de las "rayas" de las unidades produce un "punto" grande. Es por ello que se sugiere una presentación más clara (Figura 8). Asimismo es conveniente que el mismo sea construido en material transparente (acetato) que permite ver (en cualquier circunstancia) los lados del ángulo a medir.

Proyección

- Introducir, como variable didáctica, un angulómetro opaco o "hueco" (similar a semicírculos existentes en la escuela) para hacer surgir la necesidad de "estirar" los lados para poder realizar la medida.
- Fomentar la construcción de triángulos con datos que involucren medidas de ángulos, actividad propicia para elaborar mensajes geométricos. En este marco se podrían confeccionar caminos (poligonales) que involucren el sentido horario y antihorario de los ángulos.
- Indagar condiciones de la existencia de triángulos, atendiendo a sus ángulos.
- Analizar relaciones intrafigurales, atendiendo a la relación entre lados y ángulos de un triángulo: a ángulo mayor se le opone lado mayor (y recíprocamente), el triángulo equilátero es equiángulo, el triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales.
- Intercambiar actividades de medición de ángulos con alumnos de grados superiores.
- Aprovechar las XO para trabajar con programas de computación (Tortuga) en el diseño de construcciones en las que se involucren ángulos.

Comentario final

Entendemos que la propuesta puede constituir un posible camino (susceptible de ser mejorado) a transitar en el tema medición de ángulos, en tanto que:

- su puesta en práctica fue potente, puesto que los alumnos respondieron positivamente, desde lo cognitivo, en las distintas actividades;
- se logró superar, al decir de M. De Guzmán (1993), el *«posicionamiento inicial afectivo totalmente destructivo de sus propias potencialidades en este campo, que es provocado, en muchos casos, por la inadecuada introducción por parte de sus maestros»*;
- cumple con proponer actividades que caracterizan, según Chevallard, Bosch y Gascón, al quehacer de la matemática: *utilizar matemáticas conocidas, aprender y enseñar matemática, crear matemáticas nuevas*.

Bibliografía

BRESSAN, Ana María; REYNA, Ignacio; ZORZOLI, Gustavo (2003): *Geometría escolar. Actividades para grupos escolares de 6 a 12 años*. Montevideo: Ed. Rosgal.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep (1997): *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Editorial Horsori.

DE GUZMÁN, Miguel (1993): "Enseñanza de la Matemática" en D. Gil Pérez; M. De Guzmán: *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones*. Madrid: Ed. Popular. En línea: http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm

DUNHAM, William (1992): *Viaje a través de los genios. Biografías y teoremas de los grandes matemáticos*. Madrid: Ed. Pirámide.

EFIMOV, Nicolai V. (1984): *Geometría superior*. Moscú: Ed. MIR.

EVES, Howard (1985): *Estudio de las Geometrías*. México: UTEHA.

GUEDJ, Denis (2000): *El teorema del loro. Novela para aprender matemáticas*. Barcelona: Ed. Anagrama.

MOISE, Edwin E. (1968): *Elementos de Geometría Superior*. México: Compañía Editorial Continental.

REY PASTOR, J.; PI CALLEJA, P. TREJO, C. A. (1969): *Análisis matemático*. Buenos Aires: Ed. Kapelusz.

RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz y XAVIER DE MELLO, Ma. Alicia (comps.) (2005): *El Quehacer Matemático en la Escuela. Construcción colectiva de docentes uruguayos*. Montevideo: FUM-TEP - Fondo Editorial QUEDUCA.

TORRES GARCÍA, Teodoro (2007): "Una alternativa didáctica para la medición de ángulos". Ponencia ante el *Primer Congreso Internacional Enseñanza de las Matemáticas*, Asociación Latinoamericana de Maestros de Matemáticas Investigadores (ALAMMI). Coyoacán, D.F., México, 1-5 agosto 2007. En línea: http://www.alammi.info/revista/numero2/pon_000c.pdf