Enseñar construyendo una red de conocimientos

Los aportes didácticos de las secuencias de enseñanza

Mónica Agrasar | Licenciada en Matemática y Profesora para la Enseñanza Primaria. Docente de la formación inicial de maestros. Asesora en currículo, desarrollo curricular y formación docente en enseñanza de la Matemática. Dictó numerosos cursos de capacitación para maestros y profesores, realizó asistencias técnicas y asesoró a instituciones educativas y organizaciones de distintos países. Autora de publicaciones para alumnos y docentes, y de materiales de desarrollo curricular para distintos niveles de enseñanza.

Graciela Chemello | Profesora de Matemática y Física. Magíster en Didáctica. Docente de la formación inicial y continua de maestros y profesores. Asesora en currículo, desarrollo curricular y formación docente en enseñanza de la Matemática. Coordinó programas nacionales en Argentina y realizó consultorías para organizaciones de distintos países. Autora de publicaciones para alumnos y docentes, y de materiales de desarrollo curricular para distintos niveles de enseñanza.

«Quienes enseñamos necesitamos revisar permanentemente qué hacemos y para qué lo realizamos. Sabemos, por una parte, que cada una de nuestras experiencias tiene características singulares e irrepetibles; así, cada año, un nuevo grupo de alumnos nos plantea un desafío renovado. Por otra parte, los conocimientos que enseñamos y nuestras estrategias de enseñanza también se modifican; y son, además, cajas de resonancia de múltiples transformaciones y necesidades que tienen lugar en la sociedad, en sentido amplio y, en particular, en los campos de saber.» (Anzorena *et al*., 2007:14)

En estas páginas, con la intención de compartir la experiencia transitada en distintos espacios de trabajo, volveremos sobre ciertos aspectos de la tarea de enseñar que seguramente no son nuevos, pero sí centrales para hacer una relectura de las prácticas habituales y reinventar así nuestras propuestas para promover mejores aprendizajes. En la búsqueda de reconstruir para nuestros alumnos el sentido de los conocimientos matemáticos que van aprendiendo, nos ha inquietado delinear una estrategia que nos permita ir generando con ellos una red de relaciones entre las nociones que van aprendiendo y entre distintos aspectos de cada una de ellas.

Para este propósito, el diseño de secuencias con unidad de sentido que incluyan actividades que vayan contemplando algunos de los aspectos que señalaremos a continuación, y con ciertos elementos fijos: con recuperación de lo conocido, con autoevaluación de los alumnos y evaluación del recorrido, nos va resultando una herramienta potente.

Ya no es suficiente, al elaborar una planificación para estudiar una noción, elegir un conjunto de actividades aisladas, inconexas, aunque todas tengan una referencia a esa noción. Es necesario pensar en un propósito que oriente la elección y las vaya conectando en un recorrido que pueda ser claramente especificado en términos de lo enseñado y aprendido.

Hoy, nuestro acervo de conocimientos didácticos ha sido problematizado y renovado por los avances en las investigaciones didácticas, y podemos "ver" en nuestras prácticas y en las de nuestros colegas, cuestiones que no contemplábamos hace dos o tres décadas. Hemos podido derivar criterios de trabajo en relación con diferentes tareas de nuestra práctica de enseñanza, tanto para la elección de un problema que sea tal como para la gestión de cada clase. Y aún más, para diseñar un conjunto de problemas sobre una misma noción que abarque un período de dos o más semanas de clases.

¿Cuáles son los puntos de partida?

Una cuestión central es señalar que nuestra convicción sobre el tipo de aprendizaje matemático que se requiere para los niños y jóvenes, flexible para ser usado en distintas situaciones con autonomía creciente, se logra proponiéndoles actividades que les permitan construir sus conocimientos en interacción con el medio y con otros.

Hemos aprendido que para enseñar una noción matemática y lograr aprendizajes disponibles para ser utilizados a futuro en diversas ocasiones, quien aprende debe tener oportunidad de hacerlo "en situación", resolviendo problemas. Y que el trabajo matemático en la clase con esos problemas debe estar marcado por la producción y validación de procedimientos y soluciones.

Asimismo, que las nociones a enseñar deben aparecer en la clase contextualizadas en situaciones que les otorguen significado así como posibilidades de validación cuando aún no se dispone de herramientas matemáticas suficientes para hacerlo en ese marco (el matemático). Y que es necesaria la descontextualización posterior, identificando el conocimiento que funcionó como instrumento al resolver para que pueda ser reutilizado.

También que, para atender a la diversidad de conocimientos en una clase, es posible adecuar los problemas para que sean verdaderos desafíos para todos sus alumnos, modificando algunos de sus componentes –variables didácticas– generando *«ya sea un campo de problemas correspondiente a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes»* (Brousseau, 1994).

En relación con el tipo de trabajo matemático en clase, sabemos que las prácticas matemáticas desplegadas a propósito de una noción son constitutivas de su sentido y por ello es necesario dar a los niños la oportunidad de "trabajar como se hace en la ciencia" para que puedan "entrar" en la cultura matemática, es decir, en las formas de hacer, pensar y escribir propias de esta ciencia.

¿Qué dimensiones considerar al elegir un conjunto de actividades?

Cada noción a enseñar debe ser abordada a través de un conjunto de problemas, pues en cada uno es posible estudiar solo algunas cuestiones, y ese conjunto de problemas puede construirse considerando los aportes de distintas investigaciones didácticas.

Por una parte, habrá que incluir problemas que contemplen las tres componentes señaladas por Vergnaud (1997), aquellos que permitan abordar el estudio de los significados que la noción a enseñar asume por las situaciones que permite resolver en distintos contextos, problemas donde intervengan las propiedades que le son propias y las relaciones asociadas a ella, y también problemas donde la noción vaya apareciendo con sus diversas representaciones para identificarlas y conocer cómo pasar de una a otra según los requerimientos de la situación (Duval, 1998).

Habrá que elegir algunos problemas de contexto extramatemático que permita explorar su uso para responder preguntas propias de las actividades y la cultura en la que viven los alumnos, y preguntas que se hacen las personas en distintos ámbitos de la actividad social. Otros de contexto matemático en los que se pregunta alguna cuestión propia del ámbito puramente matemático, buscando comprender mejor alguna propiedad o el alcance de una noción; por ejemplo, si un determinado procedimiento es o no adecuado, si funciona o no para distintos tipos de números.

Si todas las actividades refieren a usos de los conocimientos matemáticos en contextos particulares, y no se incluyen problemas intramatemáticos donde esos conocimientos se estudien de manera explícita, no hay posibilidad de identificarlos, relacionarlos con otros conocimientos y reutilizarlos en otros contextos. Y, en el caso opuesto, un trabajo puramente intramatemático en el nivel primario obstaculiza la construcción de sentido y la identificación de los problemas que dieron origen a esos conocimientos, impidiendo reconocer cuándo usarlos y cuándo no. Por ejemplo, presentar las operaciones a partir de la resolución de cálculos e insistir en los mecanismos antes de pasar a los “problemas”[1] conduce a que los chicos, frente a un enunciado y casi antes de leerlo, pregunten si “es de más o de menos”.

En algunos problemas, el conocimiento matemático funcionará de manera implícita en la toma de decisiones en la acción (Douady, 1984), como cuando los alumnos eligen una manera personal para resolver o participan de un juego. Otros darán lugar a la formulación explícita de las nociones, avanzando en el uso del lenguaje propio de la disciplina al relatar, por ejemplo, un procedimiento. Otros permitirán producir y analizar explicaciones que justifiquen los diversos procedimientos elaborados en clase.

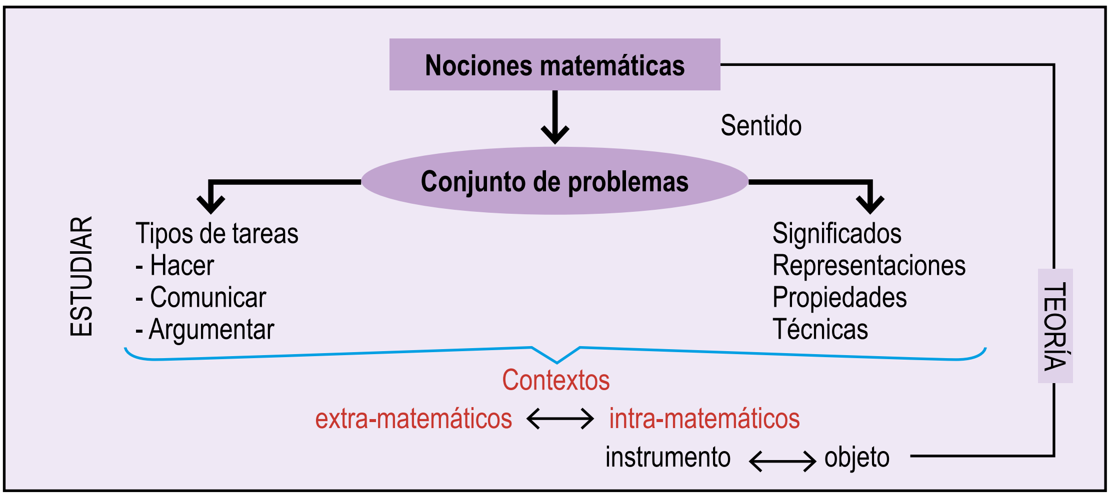
Llegar a dominar una técnica requiere de numerosas actividades en las que distintos procedimientos se comparan y analizan para descubrir sus ventajas, límites y razones de ser, en lugar de repetir una y otra vez un procedimiento cuyo funcionamiento no se comprende.

Cuando la enseñanza se centra en la actividad matemática, cada conocimiento ha de pasar de un primer momento en el cual se presenta en clase como herramienta de la actividad matemática, a otro en el que se transforma en objeto de estudio.

Luego de la resolución y como parte de la puesta en común, enunciar las conclusiones obtenidas y explorar su alcance, identificar los conocimientos nuevos y relacionarlos con otros conocidos, es fundamental para que lo que se aprende pueda ser reutilizado en nuevos problemas. El preguntarse si las conclusiones obtenidas se modifican después de analizar varios ejemplos –cuando se cambian las cantidades, los números, las figuras, etc.– y si es así, formular nuevas conclusiones es una parte central del avance en los procesos de generalización.

También es necesario incluir actividades relacionadas con el proceso de estudio con diferentes propósitos. Por ejemplo, afianzar el uso de algún procedimiento específico, sistematizar propiedades descubiertas y utilizadas en actividades anteriores, identificar los nuevos conocimientos aprendidos y elaborar una síntesis, registrar los propios avances en el aprendizaje y las nuevas preguntas que interesa investigar, entre otros posibles.

El cuadro siguiente resume lo planteado.



[1] El entrecomillado refiere al uso escolar habitual de la palabra problema ligada a un texto breve que incluye datos numéricos sobre cantidades o medidas y una o varias preguntas a las que hay que responder usando una o más operaciones, y no a la noción más general de problema como desafío cognitivo.

Claro que reunir todos estos criterios en el diseño de una única secuencia de trabajo no es posible ni para un contenido, ni para un año escolar, tanto por el necesario tiempo de apropiación y puesta en relación con otras nociones, como por la obsolescencia de su vida en la clase. Sí, en cambio, es posible distribuirlos en la organización de distintas secuencias para distintos recortes de un contenido y sucesivos años escolares.

¿Cómo organizar secuencias para cada recorte?

La singularidad del trabajo cada año, con cada grupo, dará lugar a una variedad de alternativas que cada maestro podrá elaborar. En tal sentido, los dos ejemplos que planteamos a continuación pretenden mostrar cómo variar los problemas conservando algunos criterios fijos y variando otros.

Cabe señalar que los ejemplos solo tienen el propósito de ilustrar algunas decisiones posibles. Cada grupo de alumnos requiere de propuestas elaboradas a medida, adecuadas a sus conocimientos y a los propósitos de cada docente, en cada institución.

1. Secuencia para primer grado[2]

Usar la suma para registrar la cantidad de elementos de una colección

La secuencia apunta a avanzar del conteo al cálculo, reconociendo el uso de la suma, con sentido de agregar, para determinar la cantidad de elementos de una colección, y descubriendo que el resultado de una suma no varía si se cambia el orden de los sumandos. También se espera que los alumnos vayan construyendo un repertorio de sumas conocidas.

Antes de iniciar una secuencia con estos propósitos es importante que el maestro haya identificado, para cada niña, niño, sus conocimientos en relación con: la serie oral, la serie escrita, el ajuste del conteo y el uso del sobreconteo. Esto determinará qué actividades elegir para todos y qué actividades complementarias agregar para que, sin apartarse de lo que se compartió con los compañeros en la clase, cada niño fortalezca lo que necesite.

1. Papeles y tijeras
Los chicos van a dibujar y recortar. En la mesa había 4 hojas de papel de color y la maestra trajo 3 más. Alex trajo 5 tijeras y después Juli buscó 2 más. Si en la mesa hay 7 chicos, ¿alcanzan los papeles y las tijeras para todos?

2. Saber cuánto hay
Mirá como resolvieron los chicos, ¿está bien?

//// /// 7 ////// // 7 ALCANZA	4 + 3 = 6 5 + 2 = 7 FALTA PAPEL	CONTÉ Y ALCANZA

<u>Para conversar entre todos</u>: ¿Cómo podemos hacer cuando hay una cantidad y se agrega otra para saber cuánto hay?

Los procedimientos para resolver la actividad 1 dependen de los conocimientos del grupo y, por lo tanto, la actividad 2 deberá adaptarse incluyendo esos procedimientos, recuperándolos y destacando el uso de los signos + e =, que los niños ya podrían conocer.

Si esto no fuera así, habrá que dedicar algo más de tiempo a la presentación de esta escritura.

En el caso de los apartados “Para conversar entre todos”, el maestro puede escribir lo que los chicos le dictan luego del intercambio oral y después se puede elegir una frase corta de ese texto para copiar en el cuaderno.

3. Los caramelos
Inés tiene 5 caramelos y Sandra tiene 3. A cada una le regalan 4 caramelos. ¿Cuántos tienen ahora?

4. Saber cuánto hay
Para saber cuántos caramelos tenía Inés, un chico escribió 4 + 5. ¿Está bien?

<u>Para conversar entre todos</u>: Otro chico dice que es más fácil 5 + 4. ¿Te parece que tiene razón?

5. ¿Fácil o difícil?
Marcá F si es fácil o D si te parece difícil.
2 + 7 6 + 2 3 + 5 5 + 3

<u>Para conversar entre todos</u>: Si hay que sumar dos números, ¿hay sumas que son más fáciles que otras? ¿Por qué? ¿Se puede transformar una cuenta difícil en una más fácil? ¿Cómo?

---
[2] Adaptada de Chemello y Agrasar (2010).

Al avanzar con las actividades 3, 4 y 5 se descubren sumas hasta 9 de distintos números con el mismo resultado y el uso de la propiedad conmutativa de la suma. Dado que los niños pueden resolver por sobreconteo apoyándose en el conocimiento de la serie oral, se podrían incluir sumas que den 10 o más, dependiendo de los conocimientos de la clase.

En términos de los niños, las conclusiones de los momentos de intercambio oral podrían ser: *Hay sumas que dan igual. Para sumar es más fácil poner primero el número más grande. Para sumar podés cambiar el orden de los números. Hay sumas que no se pueden cambiar como 2 + 2.*

En las actividades 1 y 3 se da lugar a que las niñas y los niños resuelvan a su modo, mientras que en las actividades 2 y 4 cambia el tipo de tarea: ahora se trata de analizar procedimientos. Después de los primeros intercambios orales en los que se busca la reflexión sobre lo realizado, se avanza en el estudio de la suma como objeto, cuáles son fáciles, difíciles, cuáles dan igual. En el caso de la comparación fácil/difícil no interesa la respuesta que den los niños, que podría variar, sino el tipo de trabajo propuesto: comparar los números y relacionar esa suma que se identifica como "difícil" con lo que ya se conoce.

En relación con la argumentación cabe señalar que en primer/segundo grado, las "razones" que pueden dar los niños refieren generalmente a comprobaciones empíricas o al uso de ejemplos. Por ejemplo, en las actividades 2 y 4 los chicos pueden contar, sobrecontar o apoyarse en la banda numérica si la han usado antes. También si saben que 4 + 4 es 8 y que 5 es uno más que 4 pueden relacionar esos conocimientos para argumentar. Es posible que alguno necesite contar objetos, estrategia que solo se abandona cuando se conoce un repertorio básico de resultados memorizados.

6. Sumas que dan igual
a. Marcá con x las cuentas que dan el mismo resultado.
6 + 1 = 2 + 5 = 6 + 2 = 5 + 2 = 1 + 6 =
b. Escribí dos sumas que den el mismo resultado.

7. Ya aprendí
Escribí en tu ficha cuatro sumas que ya sabés de memoria, sin contar ni usar los dedos.

Es importante que, si no se hizo luego de las actividades 4 o 5, se registren las conclusiones luego de la actividad 6 en un cartel, o en los cuadernos de los niños si es que pueden hacerlo. Además de poder resolver, es importante que se nombren y se registren los nuevos conocimientos para que los niños puedan reconocerlos. También es posible registrar las cuentas que todos los niños de la clase saben sin usar los dedos. Para los niños, reconocer lo que saben es fundamental tanto para poder utilizar esos resultados en otras ocasiones para sumar otros números, como para ganar confianza en sus propias posibilidades de hacer matemática. Tener una ficha en la que se van registrando los avances ayuda en este proceso.

8. El juego del mayor
En grupos de a cuatro, cada grupo tiene un mazo de tarjetas con los numerales del 1 al 5 en 4 colores distintos. En cada ronda, cada alumno toma dos cartas y las coloca frente a sí, se lleva las cartas aquel que logra la suma mayor. Gana el que junta más cartas.

9. Pensamos sobre el juego
Los chicos jugaron al mayor.
a. Marcá quién ganó con X.

Vicky	Luca	Male	Sol
5 4	4 3	3 5	3 4

b. Completá las cartas para que gane Male.

Vicky	Luca	Male	Sol
4 3	3 ...	3 ...	... 4

<u>Para conversar entre todos</u>: ¿Hace falta hacer la suma para saber quién ganó? ¿Por qué? ¿Qué números se pueden elegir para que gane Male?

c. Escribí en tu ficha alguna cuenta nueva que pudiste hacer sin los dedos.

El juego permite utilizar lo aprendido, fortalecer el repertorio de sumas y la comparación de números, y será una oportunidad para el docente para observar y registrar si los alumnos usan los dedos o recurren a algunos resultados conocidos, y si usan la propiedad conmutativa de manera espontánea o no. Lo que le permitirá comparar con el diagnóstico inicial.

La actividad posterior al juego con su análisis, brinda una nueva oportunidad para sistematizar lo que se está aprendiendo y establecer relaciones.

10. ¿Qué sabemos?
a. Completá el cuadro de sumas.

+	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

b. Escribí todas las sumas que dan 6.
c. Escribí todas las sumas de números iguales.

Para conversar entre todos: ¿Qué número se repite más veces en el cuadro? ¿Cuál menos? ¿Por qué?

La actividad 10 supone un nuevo momento de revisión y sistematización.

El último análisis sobre por qué algunos números se repiten más que otros, busca que los niños se vayan familiarizando con un tipo de trabajo que es propio de la matemática, la identificación de regularidades y contrastes, el formularse preguntas acerca de los números, indagar si lo que "pasa" con unos números también pasa con otros o no, buscar explicaciones para esas diferencias.

Como evaluación individual para complementar la información recogida durante el juego se podría presentar un problema similar al de las actividades 1 o 3, si hay varios niños que todavía recurren al conteo, o una situación en el contexto del juego, junto con algunos cálculos.

Por ejemplo:

¿Qué aprendí?
1. Julia y Sandra ponen la mesa. Julia puso primero 5 platos y después 4. Sandra puso primero 4 vasos y después 3. ¿Pusieron la misma cantidad? ¿Por qué? (o Julia y Sandra juegan al mayor. Julia saca 5 y 4, y Sandra 4 y 3. ¿Quién ganó? ¿Por qué?).
2. Escribí tres sumas que den 8.
3. Escribí tres sumas que ya sabés sin los dedos.

De este modo, en la secuencia se alternan momentos en los que los conocimientos matemáticos se usan para responder preguntas que se formulan en distintos ámbitos de las actividades sociales de las personas, con otros en los que las preguntas se refieren directamente a un "objeto" matemático con la intención de estudiarlo, acompañando esta reflexión con un registro escrito.

Comparar las producciones de los chicos con el diagnóstico inicial permitirá no solo advertir los avances y detectar necesidades específicas, sino tomar decisiones en relación con el avance del trabajo sobre el cálculo.

Para ampliar el repertorio con sumas cuyo resultado es más de 10, dejando progresivamente el uso de los dedos o materiales para contar, es necesario recurrir a las descomposiciones y al uso de las propiedades. Para adquirir esta técnica, cada niña, niño, tiene que poder reconocer qué sabe y relacionarlo con lo nuevo. Por ejemplo, para 7 + 8, un niño podría descomponer buscando cincos, si sabe que 5 + 5 = 10 y otro que sabe que 7 + 3 = 10 puede "sacarle" un 3 al 8, para agregarlo al 7. Estas descomposiciones, para ser genuinas tienen que ser producto de decisiones de los alumnos en función de lo que saben, y no de explicaciones del maestro que muestra la técnica. Por eso, es que son tan importantes las instancias de análisis, reflexión y explicación de lo que se aprende. También es necesario registrar, ordenar, relacionar las conclusiones que se van obteniendo y tomar conciencia sobre los propios avances.

Reiteramos que esta secuencia muestra un ejemplo posible para articular el uso, el análisis y la sistematización de resultados y propiedades de una operación y no una estructura cerrada. Por ejemplo, tendrían que incluirse más actividades intermedias tanto de resolución de problemas en contexto extramatemático, por ejemplo, después de las actividades 3 o 7 agregando nuevos ejemplos con otras cantidades, y otras para fortalecer el repertorio de resultados conocidos, en función de los conocimientos de cada grupo particular.

2. Secuencia para quinto grado[3]

Registrar y comparar cantidades y números usando fracciones

El propósito del siguiente conjunto de problemas es que los alumnos elaboren y utilicen criterios de comparación de fracciones, y puedan interpretar y producir escrituras distintas de una misma cantidad. Asimismo que reutilicen conocimientos sobre las fracciones abordados en tercer y cuarto grado.

Se trata de un conjunto de diez actividades más un par, la 0 y la 11, ligadas a la evaluación. Se incluyen además breves actividades de tarea para realizar fuera de la escuela y retomar en clase. Los problemas que se presentan son tanto contextos extramatemáticos (la fiesta, el juego, los repartos con amigos) como intramatemáticos (números y partes, vale o no vale). Los significados de las fracciones que aquí aparecen son conocidos de años anteriores: como expresión de una medida y como resultado de un reparto, y entre las distintas representaciones aparecen la gráfica y la numérica. En ambos casos con ampliación a nuevos ejemplos, con otras formas de dividir un rectángulo y con expresiones con números mixtos, sumas y restas para repartos con otras cantidades. En cuanto al repertorio de fracciones, se inicia con medios, cuartos y octavos, y luego se incorporan tercios y sextos –hasta aquí conocidos de cuarto grado– y quintos, décimos y doceavos, nuevos.

Consideremos las actividades por grupos para analizar sus articulaciones.

[3] En Agrasar, Chemello y Díaz (2012:79-93).

1. En una fiesta

a) Cuatro amigos quieren repartir en partes iguales tres alfajores. ¿Qué parte le tocaría a cada uno?
b) Al repartir 6 pizzas entre 8 amigos en partes iguales uno decía que a cada uno le tocaba 6/8, otro decía 3/4 y algunos decían que le tocaba 1/2 y 1/4. ¿Quiénes tenían razón?
c) Con una botella de jugo de 2 y 1/4 litros, ¿cuántos vasos de 1/4 litro se pueden llenar?
d) Para la fiesta se calcula 1/2 litro de bebida por persona. ¿Cuántos litros se precisarán para 2, 3, 4 y 5 personas?
e) Se calcula 1/4 kilo de helado por persona. Completá la tabla.

Cantidad de personas	1	2	3	4	8	6
Helado (en kg)	1/4					

2. Los números en los problemas

Reunite con un compañero y comparen los procedimientos que utilizaron para responder a las preguntas de la actividad 1.

a) ¿Qué tienen en común? ¿En qué se diferencian?
b) ¿Qué representa 3/4 en el primer problema? ¿Qué representa 3/4 en el problema de las pizzas? ¿Y en el de los helados?
c) ¿En qué otros casos pueden usar 3/4 para registrar una cantidad? Escriban dos ejemplos.

Tarea:

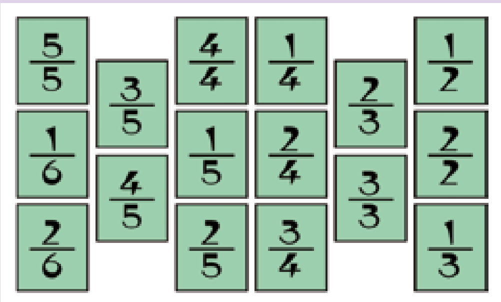
a) En una fiesta había 3 botellas de gaseosa de 2 y 1/4 litros y 2 botellas de 1 litro y medio. Si se sirvieron 40 vasos. ¿Es cierto que todos los vasos tenían 1/4 litro?
b) Si se reparten 2 kilos de helado en 10 porciones iguales, cada porción, ¿tiene más o menos de 1/4 kg?

Las actividades 1 y 2 están conectadas, pues en la primera se pide a los alumnos que resuelvan y en la segunda se reflexiona sobre lo realizado en la primera. Este par está centrado en indagar cuáles de los conocimientos ya abordados en tercer y cuarto grado están disponibles para la resolución. Tanto el repertorio de fracciones como los contextos –situaciones de reparto y de medida– son conocidos y se espera que los chicos resuelvan usando sumas o restas, o agrupando para formar enteros.

La tarea solicitada a los niños es diferente, en el primer caso deben resolver trabajando matemáticamente; y en el otro, explicitar lo pensado y comunicarlo por escrito. Las conclusiones que se esperan obtener se refieren a “diferentes formas de expresar el resultado de un reparto” –6/8, o 3/4 o 1/2 y 1/4 en un caso; y 4 de 1/4 para formar 1, y 8 de 1/4 para formar 2, y 9 de 1/4 para 2 y 1/4 en otro caso–. También podría aparecer una escritura como 4 de 1/2 para darle a 4 personas 1/2 litro, que puede expresarse como multiplicación: 4 x 1/2 = 2.

Asimismo, al analizar los referentes de 3/4 en los problemas se aporta a la explicitación de su uso, y al pedir ejemplos de otras cantidades para 3/4 el maestro podrá recoger información sobre otros contextos que sus alumnos conozcan para el uso de fracciones.

3. Guerra de fracciones
Materiales: 48 cartas con fracciones representadas en forma numérica.



Reglas del juego: en grupos de 4 alumnos, se mezclan y se reparten 12 cartas a cada jugador con la representación numérica hacia abajo, formando 4 pilas. Los 4 muestran a la vez en el centro, la carta superior de su pila. El que tiene la carta de mayor valor se lleva las cuatro cartas y las coloca aparte en otra pila personal. Las cartas llevadas no se vuelven a usar. Si hay empate se juega otra vuelta. En la “guerra”, el ganador se lleva las ocho cartas de la mesa. Gana quien al final del juego tiene más cartas.

4. Después del juego
Primera parte
a) Si estás jugando y la carta de tu mazo es 1/2, ¿qué cartas te conviene que tengan los otros jugadores? ¿Y si sacás 1/4?
b) Javier puso sobre la mesa 3/4, y Lucas 3/5. Lucas se llevó las cartas, dice que *5 es más grande que 4*. ¿Es correcto? ¿Por qué?
c) En la mesa están las siguientes cartas: 3/5 4/6 7/10 7/12.
¿Cuál es la carta de mayor valor? ¿Por qué?
d) ¿Qué recomendaciones le darías a un amigo para que juegue y gane?

Segunda parte
a) Julio sacó la carta correspondiente a 1/3 y fue “guerra”. ¿Qué carta pueden haber tenido los otros jugadores? ¿Hay otras opciones?
b) Vicky colocó 7/8 y Mechi 9/10. Dicen que entre ellas hay “guerra”, ¿estás de acuerdo? ¿Por qué?
c) ¿Con todas las cartas puede haber “guerra”?
d) ¿Cómo te podés asegurar de que entre las cartas sobre la mesa hay “guerra”?

Tarea:
Encontrá 2 fracciones equivalentes a:
a) 3/4 b) 8/10 c) 15/9

5. Repartos entre amigos
A Yuki le regalaron una caja con 12 chocolates, ella se comió uno y quiso repartir 5 entre 4 de sus amigas y los que quedaban entre sus 5 amigos.
a) Uno de los chicos dice que no es justo porque ellos son más. Sonia dice que comen igual porque hay un chocolate más y un amigo más, así que da lo mismo.
¿Quién tiene razón? ¿Les toca más a los amigos o a las amigas?
b) Yuki dice que no se peleen que mejor repartan lo que queda entre los 9, igual para todos. Si se reparte de este modo, ¿las chicas comen más o menos que antes? ¿Y los chicos?
c) Cinco amigos quieren repartir en partes iguales cuatro alfajores. ¿Qué parte le tocaría cada uno? ¿Y si tuvieran 6 alfajores?
d) ¿Será cierto que si se reparte en partes iguales 4 entre 7 da 4/7 y 5 entre 9 dará 5/9?

Tarea:
Celina tiene 12 metros de tela estampada y 15 metros de tela lisa, del mismo ancho. Hace 16 almohadones iguales estampados y otros 20 lisos. ¿Podemos saber si usó más tela para los almohadones lisos o para los estampados? ¿Por qué?

Las actividades 3, 4 y 5 forman un trío: el Juego de Guerra, la actividad de reflexión para después de jugar y una nueva para usar lo aprendido. El foco está en la comparación numérica, que ya en años anteriores se trabajó con apoyo en lo gráfico. Sin embargo se habilita el uso de papel y lápiz para quien lo necesite como apoyo a su decisión o a su explicación; por ejemplo, al establecer quién gana en una mano, alguno puede no estar convencido del resultado.

No analizaremos aquí la variedad y riqueza para la discusión matemática de los procedimientos de comparación a los que da lugar el juego, pero puntualizamos que en la actividad de reflexión se eligen posibles jugadas para analizar las distintas alternativas de comparación: fracciones con numerador común, con denominador común, equivalentes, a ambas le falta 1 parte para el entero, la comparación con 1/2.

Al finalizar la actividad 4 se espera que queden explicitados como conclusión, los diferentes criterios de comparación de fracciones.

Nuevamente en la actividad 5 se piden comparaciones con más unidades que personas –fracciones mayores que 1–, con menos unidades que personas –fracciones menores que 1–, y por último se pregunta por la relación con la cuenta de dividir cuando el dividendo es menor que el divisor. En este caso se modifica el contexto, es un reparto entre amigos, para reutilizar los criterios elaborados y avanzar en una nueva relación. En cuanto a las tareas durante las actividades se pasa de la toma de decisiones durante el juego a la comunicación escrita de las estrategias y la producción de recomendaciones para la comparación, y finalmente se propone analizar argumentos para decidir quién tiene razón.

La inclusión de "Tarea" apunta a fortalecer el proceso de estudio y será interesante considerar, en cada caso, cuál es la relación entre los conocimientos a los que se apuntó en la actividad precedente y los necesarios para resolver la tarea. En todos los casos se trata de volver sobre lo ya trabajado en clase.

El siguiente par de actividades, la 6 y la 7, se ubica en el mismo contexto anterior, el reparto entre amigos, pero con el foco en diferentes procedimientos de reparto. En la actividad 6 se presentan dos formas de repartir 3 entre 4; y en la Tarea, dos repartos equivalentes: 3 entre 6 y 2 entre 4.

6. Comparar repartos

a) Reunite con un compañero y leé cómo pensaron Ale y Jime para repartir 3 chocolates iguales entre 4 chicos.

Discutí con tu compañero si los chicos reciben la misma cantidad de chocolate cuando reparte Ale o cuando reparte Jime, y explicá por qué sí o por qué no.

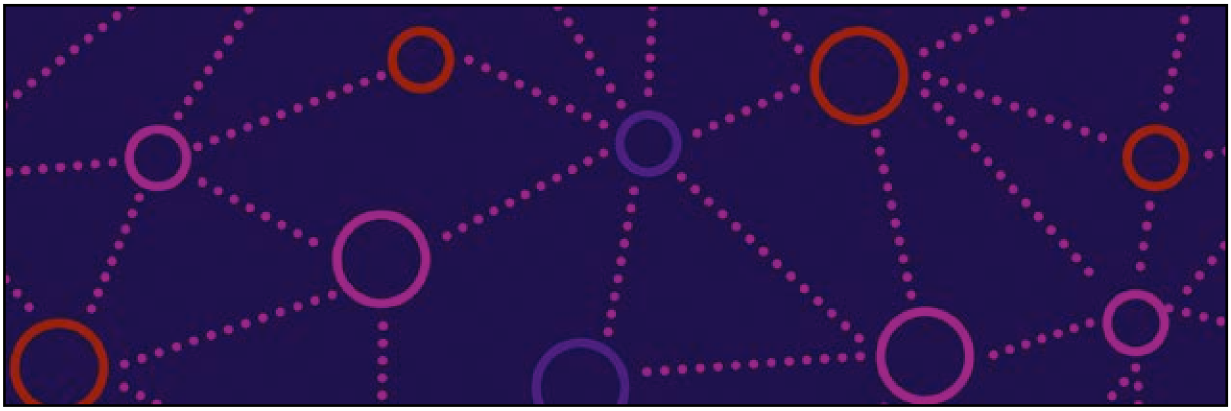
b) ¿Cómo pensás que haría Jime para repartir 5 chocolates entre 8 chicos? ¿Y Ale?

c) Si Ale anotó 1/2, 1/2 y 1/4, ¿en qué reparto habrá pensado?

Tarea:

A la pizzería llegan 10 amigos, como no hay una mesa tan grande se sientan 6 en una mesa y 4 en otra. En la mesa de 4 piden 2 pizzas grandes y en la de 6 personas piden 3 pizzas. Si en las dos mesas las pizzas se reparten de manera equitativa, ¿es cierto que las personas de la mesa de 6 comieron más que las de la mesa de 4? ¿Por qué?

¿Qué pasaría si en cada mesa piden una pizza más?



7. Otros repartos

a) Reunite con un compañero y leé cómo pensaron Vanesa y Joaquín para repartir 23 chocolates iguales entre 5 chicos. Luego piensen si a los chicos les conviene que reparta Vanesa o Joaquín, y expliquen por qué.

b) Leé cómo se repartieron 8 chocolates iguales entre 3 chicos. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?
Se han partido por la mitad 6 chocolates y se entregaron cuatro mitades a cada uno. Luego, los 2 chocolates restantes se cortaron en tres partes cada uno y se le entregaron dos de esas partes a cada chico.

c) Mostrá otras 2 formas de repartir 8 entre 3.

d) Anotá las expresiones fraccionarias que surgen de b) y c). ¿Cómo podrías explicar que representan la misma cantidad? Escribí en una hoja tu explicación.

En la actividad 7, además de volver sobre la cuenta de dividir y su resto, uno de los procedimientos requiere de volver a partir una parte. Aquí, el resto de 23 : 5, que son 3 chocolates, también se reparte con distintos procedimientos.

Nuevamente se toma la relación con la cuenta de dividir, ahora para dividendo mayor que el divisor, y la idea de parte de parte que se liga con la multiplicación de dos fracciones unitarias, equivalente a dividir dos veces.

El par 8 y 9 son problemas de contexto intramatemático, en los que se ponen en juego los mismos conocimientos que se han abordado en las actividades anteriores, retomando las posibles conclusiones elaboradas sobre diferentes escrituras y sobre partes pintadas de diferentes formas en la actividad 8; y en la actividad 9, sobre fracciones equivalentes y relación de la fracción con la cuenta de dividir. En la 8, la tarea es analizar la validez de las afirmaciones y se pide escribir otras.

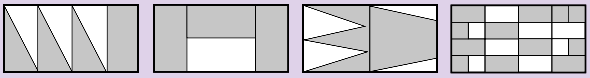
8. Para comparar

a) Buscá entre las tarjetas las que tienen expresiones equivalentes.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$	$\frac{20}{15}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{15}{20}$
$\frac{4}{6}$	$1 - \frac{1}{3}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$	

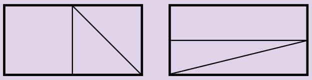
b) ¿Es cierto que 6/8 es equivalente a 12/16? ¿Y a 9/12? ¿Por qué?

c) ¿En cuáles de estos rectángulos se pintaron las 3/4 partes? ¿Por qué?



Tarea:

Marcá 5/8 en estos rectángulos.



9. ¿Vale o no vale?

a) Explicá por qué las siguientes afirmaciones son o no verdaderas.

- Una misma cantidad se puede representar con números diferentes, sin que sean fracciones equivalentes.
- Si se multiplica el numerador y el denominador por 2, o 3, o 5 se obtiene una fracción equivalente; si se divide, no.
- Una fracción se puede pensar como el resultado de un reparto donde el dividendo es el numerador y el divisor es el denominador.

b) Escribí dos afirmaciones que sean verdaderas para compartir en clase.

Por último, las actividades 10 y 0/11 apuntan a la evaluación. La 10 propone que cada niño vuelva sobre el conjunto de los aprendizajes realizados, analizando cuáles y por qué le resultaron difíciles, y escribiendo textos que retomen los conocimientos explicitados a lo largo del recorrido en las conclusiones. La 0/11 tiene doble número porque la idea es tomarla al inicio y al final de la secuencia para tener información sobre los avances realizados por cada uno de los niños en el recorrido de las actividades de la secuencia.

10. Mirar lo que aprendimos

a) Si un amigo te pregunta cómo se da cuenta si dos fracciones son equivalentes, ¿qué le dirías?

b) Al resolver los problemas encontramos distintas maneras para expresar el resultado de un reparto. Escribí dos ejemplos donde esto ocurra.

c) ¿Cómo se relacionan las fracciones con la división? Usá un ejemplo para mostrar esa relación, por ejemplo, ¿cómo podés relacionar la fracción 4/5 con una división? ¿Y la fracción 7/3?

d) ¿Tendrías que repasar algo más para poder relacionar y comparar distintas expresiones fraccionarias y poder utilizarlas en la resolución de situaciones?

0/11 ¿Qué sabemos?

1.- Distintos repartos

a) Se quieren repartir en partes iguales 12 turrones entre 9 amigos. ¿Cuánto turrón le corresponde a cada uno?

b) Para repartir 5 alfajores entre 4 amigos se proponen tres formas distintas.

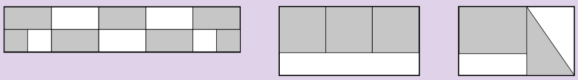
Decidí si algunas o todas las expresiones siguientes indican la cantidad de alfajor que recibe cada amigo. Explicá cómo lo pensaste.

1 + 1/4 5/4 1/2 + 1/2 + 1/4 3/4 + 3/4

2.- Partes del entero

a) ¿Es cierto que 4/10 es equivalente a 8/20? ¿Y a 6/15? ¿Por qué?

b) ¿Es cierto que en cada uno de estos rectángulos se pintaron las 3/5 partes? ¿Por qué?



3.- Para explicar

a) ¿Cómo explicás a un amigo cuál es el resultado de repartir 14 entre 5? ¿Y el resultado de dividir 5 por 6?

b) Prestá atención a estas ideas. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

- En un reparto, se pueden encontrar distintas maneras de expresar el resultado usando fracciones.
- Dos fracciones distintas pueden representar la misma cantidad.

4.- Para registrar lo que aprendiste

a) ¿Cuál es el resultado de repartir 14 entre 5? ¿Y el de dividir 5 por 6? Explicá cómo lo pensaste.

b) Prestá atención a estas ideas ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

- En un reparto se pueden encontrar distintas maneras de expresar el resultado usando fracciones.
- Dos fracciones distintas pueden representar la misma cantidad.

Hasta aquí, hemos presentado dos secuencias de actividades organizadas sobre un recorte particular de contenidos no para considerarlas como modelos a seguir, sino con el propósito de ejemplificar la puesta en acto de los criterios que planteábamos al inicio de este artículo y que orientan nuestras decisiones didácticas.

La elección del conjunto de actividades que se presentarán en un aula, a un grupo de niñas y niños, en un momento dado y en una institución particular, solo podrá ser realizada por el maestro atendiendo a los saberes de su grupo y a su proyecto de enseñanza para que esas elecciones puedan hacer vivir en la clase los conocimientos previstos.

Sin embargo pensamos que al planificar puede ser útil, además de resolver las actividades elegidas, anticipar los distintos procedimientos de resolución y las conclusiones posibles de obtener en cada clase, utilizar estos criterios o dimensiones de análisis para revisar nuestra selección. Si encontráramos que se modifican todos a la vez (los contextos son distintos, los tipos de representaciones varían y cambia el repertorio numérico –entre otras diferencias posibles–), no podríamos asegurar identificar la coherencia interna de la secuencia en función de algún propósito definido. Si, en cambio, se evidencian varias reiteraciones en algunas dimensiones (actividades con el mismo contexto, el mismo rango numérico, el mismo tipo de interacción, etc.), estaríamos frente a una propuesta de actividades repetitivas que no enriquecerán el tipo de trabajo propuesto a los alumnos, con el consecuente impacto en sus aprendizajes. Q

Referencias bibliográficas

AGRASAR, Mónica; CHEMELLO, Graciela (2008): "Los conocimientos matemáticos en la formación de maestras y maestros. ¿Qué y cómo aprenden los que van a enseñar?" en *12(ntes) Enseñar Matemática. Nivel Inicial y Primario*, Nº 3, pp. 7-17. Buenos Aires: Ed. 12(ntes).

AGRASAR, Mónica; CHEMELLO, Graciela; DÍAZ, Adriana (2012): *Notas para la Enseñanza 1*. Matemática para todos en el Nivel Primario. Buenos Aires: Ministerio de Educación. Presidencia de la Nación. En línea: http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL005016.pdf

ANZORENA, Susana; BRICAS, Beatriz; ITURBE, Alicia (autoras); ZINELLI, María Teresa (colaboradora) (2007): "Enseñar matemática en el segundo ciclo de EGB" en *Matemática 4*. Serie Cuadernos para el aula. Buenos Aires: Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología. Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente. En línea: http://www.ibe.unesco.org/curricula/argentina/ag_upr4_mt_2007_spa.pdf

BROUSSEAU, Guy (1986): "Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática" en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, Nº 2, pp. 33-115. Grenoble: La Pensée Sauvage, éditions.

BROUSSEAU, Guy (1994): "Los diferentes roles del maestro" en C. Parra; I. Saiz (comps.) *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Ed. Paidós Educador.

CHEMELLO, Graciela; AGRASAR, Mónica (2010): *Todos pueden aprender. Propuestas de enseñanza de Matemática para primer grado*. Asociación Civil Educación para Todos / UNICEF / Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana.

DOUADY, Régine (1984): "Jeux de cadres et dialectique outil-object dans l'enseignement des mathématiques". Tesis de graduación, Universidad de Rennes. Traducida en *Selección Bibliográfica I*, Programa para la Transformación de la Formación Docente. Buenos Aires: Ministerio de Cultura y Educación (1994).

DUVAL, Raymond (1998): "Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento" (Traducción) en F. Hitt (ed.): *Investigaciones en Matemática Educativa II*, pp. 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

PANIZZA, Mabel (2003): "Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas" en M. Panizza (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*. Buenos Aires: Ed. Paidós. Colección Cuestiones de Educación, Nº 41.

PANIZZA, Mabel (2003): "Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la matemática" en M. Panizza (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*. Buenos Aires: Ed. Paidós. Colección Cuestiones de Educación, Nº 41.

SADOVSKY, Patricia (2005): *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal. Colección Formación Docente - Matemática.

SAIZ, Irma (2011): "La resolución de problemas en el aprendizaje de la Matemática. Creencias y realidad" en AA.VV.: *El lugar de los problemas en la clase de Matemática*. Buenos Aires: Ed. Novedades Educativas.

VERGNAUD, Gérard (1977): "Actividad y conocimiento operatorio" en C. Coll (traductor) (1983): *Psicología Genética y aprendizajes escolares. Recopilación de textos sobre las aplicaciones pedagógicas de las teorías de Piaget*. Madrid. Siglo XXI editores.