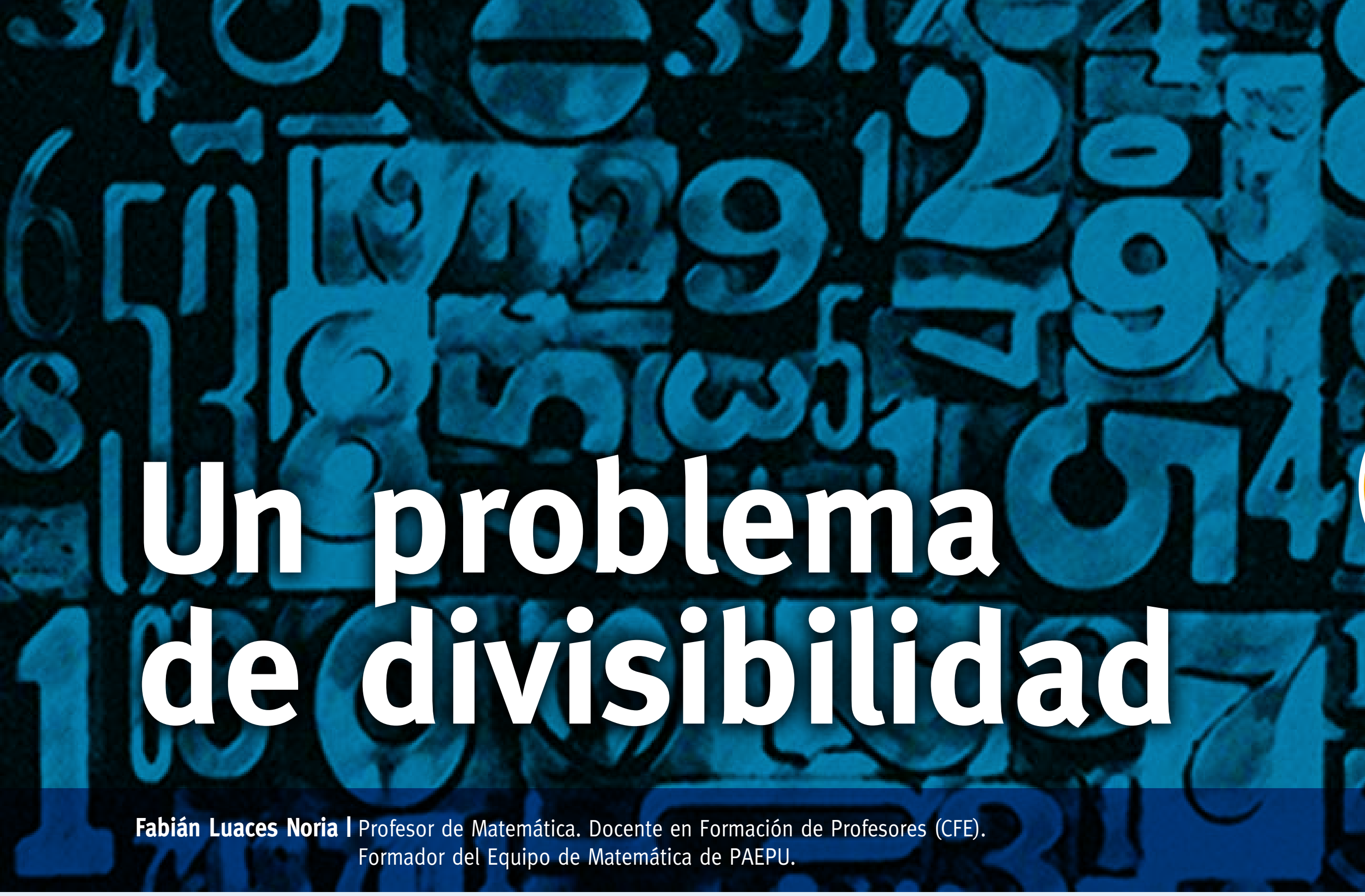


Un problema de divisibilidad

Fabián Luaces Noria | Profesor de Matemática. Docente en Formación de Profesores (CFE).
Formador del Equipo de Matemática de PAEPU.

> *«Los problemas constituyen la fuerza motriz de las matemáticas. Se considera un buen problema aquel cuya resolución, en vez de limitarse a poner orden en lo que no era sino un callejón sin salida, abre ante nosotros unas perspectivas totalmente nuevas.»* (Stewart, 2005:16)

Antes de continuar la lectura le pido, estimado lector, que se olvide del título del artículo. Resulta que anunciar de qué va el problema que voy a analizar, es como empezar por el final de la película. Y si usted tiene un amigo que cuando comparte la salida al cine va adelantando lo que va a suceder... pues termina la amistad. Así que nuevamente le pido que ignore que hablaremos de divisibilidad (y me perdone de anunciarlo).

En clase, cuando proponemos problemas a nuestros alumnos y preguntan: *"¿Qué título ponemos?"*, habría que mirarlos con cara de *yo-no-fui* para responderles: *"El título lo ponemos al final"*. Es que si el encabezado anuncia, sugiere o induce a sospecha sobre cuál es la herramienta que solucionará el problema, es preferible obviarlo totalmente. El centro de la historia no está en la introducción, ni en el desenlace, está en las relaciones que se establecen a partir de la situación original y de la lógica del problema, que hacen que el final sea inevitable.

Y todo buen problema es una buena historia.

Este problema lo he propuesto en muchas oportunidades y a diferentes grupos: futuros profesores de Matemática, maestros en ejercicio, formadores del área de Matemática, estudiantes de Secundaria y de Primaria. Los alumnos de sexto grado de primaria y de primer año de liceo han disfrutado particularmente del desafío, poniendo todo su ingenio al servicio de responder la pregunta. En el resto de los contextos intuyen más rápido de qué va el problema, y el entusiasmo ante las relaciones que a partir de él se pueden establecer, disminuye.

En este artículo quiero compartir un análisis del problema, un relato de mi experiencia al proponerlo y reflexiones sobre cómo llevarlo adelante en nuestras clases. También esbozaré algunos de los vínculos que pueden establecerse para plantearlos en preguntas que motiven al grupo a seguir aprendiendo más sobre el tema. La versión que he propuesto últimamente es adaptada de una formulación que hace Bentancor Biagas (2013).

La situación
Un hotel tiene 20 habitaciones y en él trabajan 20 empleados. Un día juegan abriendo y cerrando las puertas de las 20 habitaciones. Al principio todas las puertas estaban cerradas. Comienza el primer empleado abriéndolas todas; sigue el segundo cerrando una no y la otra sí y así sucesivamente (primera no, segunda sí, tercera no, cuarta sí...). Luego el tercero cambia de posición (abriendo si estaban cerradas y cerrando si estaban abiertas) dos no y una sí hasta el final (primera y segunda no, tercera sí...). El cuarto hizo lo mismo, es decir, cambiar de posición todas las puertas de acuerdo a la siguiente regla: tres no y una sí, tres no y una sí, y así. El quinto no hace nada con las cuatro primeras, cambia la quinta, y así continúa. Siguen pasando todos los empleados cambiando la puerta que corresponde a su número e iniciando nuevamente desde ahí. El último empleado solamente abrió o cerró la puerta número 20.
La pregunta
¿Qué habitaciones quedaron abiertas?

La historia es visual; con los medios actuales podríamos presentar una filmación de la situación en la que los niños, como protagonistas, fueran abriendo y cerrando las puertas. Solo tendríamos que esperar el final de la película para saber qué puertas quedan abiertas. Pero podríamos reproducir la película en *cámara lenta* (muy lenta) y ahí tendríamos el gancho con la carnada... Para felicidad nuestra, no todo son nuevas tecnologías, y los desafíos intelectuales, bien propuestos, tienen el gancho incorporado: "¡Tenemos que poder saber!".

Así que no, nada de filmación. Tampoco escenificamos la situación. Leída la consigna, siempre propongo la misma rutina: *"ahora, **solo**, cada uno de ustedes trabaje en encontrar la respuesta"*.

¿Por qué solo? Para que cada uno de los alumnos tenga la oportunidad de apropiarse del problema. Para aceptarlo es necesario construir mentalmente la situación, hay que imaginarla, representarla de algún modo para anticipar posibles preguntas y respuestas. Y no es que esto no ocurra en equipos o en colectivo, es que en esas dinámicas prevalecen representaciones de algunos, y esto hace que no todos se interioricen del problema.

Después de un tiempo de trabajo les propongo "pelearse" con el problema en grupos de tres o cuatro alumnos, cuidadosamente elegidos, para enriquecer la discusión. Pero en términos generales, un *pienso* individual los prepara mejor para aportar en el grupo, proponiendo formas de abordar el problema, preguntando, ofreciendo respuestas u objeciones, asumiendo mecanismos de control sobre los procedimientos iniciados, etcétera.

Al leer la consigna y comenzar a trabajar, los estudiantes no saben la solución, no está disponible de antemano. Pero no se necesitan conocimientos matemáticos especiales para construir una respuesta. Es una situación que en general se constituye en un problema para los alumnos, todos inician procedimientos de resolución.

Después de estos comentarios le propongo, estimado lector, que dedique unos quince minutos a encontrar la respuesta (si es muy impaciente puede continuar la lectura, pero sepa que está evitando el placer de encontrarla personalmente...).

Dos procedimientos de base

Si al construir mentalmente la situación se imagina la secuencia en la que van actuando los empleados (como si se estuviera filmando la película *cámara en mano*) diré: *"siguiendo a cada empleado"*. (Este es el Procedimiento 1).

Los alumnos utilizan distintos registros para llevar el control: es habitual que dibujen las 20 puertas numerándolas, o simplemente escriban los naturales del 1 al 20, para continuar efectuando los cambios. En el renglón siguiente estarán las 20 puertas abiertas (ese renglón evidencia la acción del primer empleado). En el siguiente renglón se cambian las posiciones de las puertas 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 y 20. Cuando representan los cambios del tercer empleado encuentran que cambian la puerta 3, 6, 9, 12, 15 y 18. Y así continúan.

Una parte de un registro posible para ese procedimiento es la siguiente (Procedimiento 1, variante 1):

	Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3	Puerta 4	Puerta 5	Puerta 6	Puerta 7	Puerta 8	Puerta 9
Empleado 1	Abre	Abre	Abre	Abre	Abre	Abre	Abre	Abre	Abre
Empleado 2		Cierra		Cierra		Cierra		Cierra	
Empleado 3			Cierra			Abre			Cierra
Empleado 4				Abre				Abre	
Empleado 5					Cierra				

Una de las primeras observaciones que hacen sobre este registro es que *"una vez que llego al empleado 4, las puertas menores a 4 ya no se modifican"*. Pueden demorar más o menos en hacer la observación, pero es importante: *"Si voy por el empleado 5, las puertas 1, 2, 3 y 4 ya están en su posición final"*. Con esta observación y el registro anterior tenemos la respuesta para las puertas 1 a 5: la 1 y la 4 quedan abiertas.

Con frecuencia, los alumnos se equivocan en algún momento en este procedimiento; hay muchos cambios para efectuar controlando siempre que *"si estaba cerrada se abre, si estaba abierta se cierra"*. Algunos de ellos tienen un problema extra, ya que eligen poner cada vez "abierta" o "cerrada". (Procedimiento 1, variante 2)

	Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3	Puerta 4	Puerta 5	Puerta 6	Puerta 7
Empleado 1	Abierta	Abierta	Abierta	Abierta	Abierta	Abierta	Abierta
Empleado 2	Abierta	Cerrada	Abierta	Cerrada	Abierta	Cerrada	Abierta
Empleado 3	Abierta	Cerrada	Cerrada	Cerrada	Abierta	Abierta	Abierta

Algunas veces, en lugar de escribir "Abierta" o "Cerrada" utilizan marcas como cruces, círculos, cuadrados, rayas o puntos. Pero es el mismo registro, solo que codificado. En todos sus registros diferentes, esta variante tiene la misma consecuencia: los alumnos han realizado con menor frecuencia la observación: *"Si voy por el empleado 5, las puertas 1, 2, 3 y 4 ya están en su posición final"*.

La estrategia *"siguiendo a cada empleado"* llevada adelante sin errores devuelve la respuesta correcta al problema, pero utiliza casi exclusivamente la *fuerza bruta* de ir uno a uno, con lo que ofrece pocos mecanismos de control. Y además alienta poco a predecir sobre lo que pasará con las demás puertas.

Una variante del mismo procedimiento surge cuando eligen un registro ligeramente diferente (Procedimiento 1, variante 3) y ofrece mayores oportunidades de encontrar regularidades.

Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3	Puerta 4	Puerta 5	Puerta 6	Puerta 7	Puerta 8	Puerta 9	Puerta 10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2		2		2		2		2
		3			3			3	
			4				4		
				5					5
					6				

Quienes representan de esta forma optan por evidenciar que el empleado 3, por ejemplo, modifica el estado de tal puerta, anotando "3" en la columna correspondiente. Sin embargo, al no llevar el control del "abre, cierra", deben encontrar una forma de decidir el estado final de cada puerta. ¿Cómo lo hacen? En general fijan una columna y repiten *"abre, cierra, abre..."* por cada número que anotaron.

- *"En la del 4 tengo el 1, el 2 y el 4 así que abre, cierra, abre. ¡Queda abierta!"*
- *"En la del 6 tengo anotados el 1, el 2, el 3 y el 6: abre, cierra, abre, cierra. Queda cerrada."*

Con mucha frecuencia, los alumnos observan: *"Si voy por el empleado 5, las puertas 1, 2, 3 y 4 ya están en su posición final"*, y la complementan afirmando: *"Cuando vaya por el 10 solo voy a cambiar a partir de él"*. Algunos de ellos empiezan a poner en juego otras relaciones:

> *–Mirá, en la puerta 6 anoté el 1, el 2, el 3 y el 6.*
> Docente: *–¿Y? ¿Hay alguna relación?*
> *–¡Son sus divisores!*
> Docente: *–Ah, tenés razón, ¿se cumple en todos los casos?*
> *–A ver... sí, en todos.*
> Docente: *–¿Y qué tiene que ver esto de las puertas y los empleados con el número de puerta y el número de empleados?*

En el diálogo anterior no les pregunto a los alumnos por la respuesta al problema, juntos volvemos la mirada sobre una relación que establecen para trabajar en su validación. ¿Por qué están anotados el 1, el 2, el 3 y el 6 en esa columna? ¿En qué columnas estará anotado el 2? ¿Y el 3? ¿Y el 7? ¿Por qué el 7 está anotado en la columna de la puerta 7 y en la de la puerta 14? Pero en las respuestas exijo que utilicen a los empleados. *"El 7 está anotado en la columna del 7 y la del 14, porque el empleado 7 toca cada 7 puertas empezando por la 7."*

En el caso de que las cámaras estén fijas en cada puerta, puedo ver lo que le hacen los empleados a cada una en particular, vemos la secuencia *"puerta por puerta"*.

A la primera puerta la modifica solo el primer empleado. ¡Queda abierta! El 1, el 2 y el 4. Y así continúan. (Procedimiento 2)

Los registros para el Procedimiento 2 difieren en la forma de organizar las relaciones. Algunos optan por hacerlo de modo similar a los del Procedimiento 1, pero mayoritariamente utilizan números (Procedimiento 2, variante 1):

Y otros prescinden de la organización tabular escribiendo simplemente (Procedimiento 2, variante 2): *"Puerta 1, el 1. Puerta 2, 1 y 2. Puerta 3, 1 y 3. Puerta 4, 1, 2 y 4"*. Y así continúan.

Para dar la respuesta en ambas variantes del Procedimiento 2, muchos alumnos emparejan los números que anotaron con el recitado: *"abre, cierra, abre..."*.

Los alumnos elaboran las dos estrategias de base, *"siguiendo a cada empleado"* y *"puerta por puerta"*, continuando los patrones originales, y en general todos se embarcan en uno de ellos. En las cinco variantes que comenté, en las reflexiones que a partir de ellas los alumnos hicieron, están todas las piezas de información necesarias para ir más allá de la respuesta del problema.

La respuesta

Cuando pasen los 20 empleados quedarán abiertas las puertas 1, 4, 9 y 16.

Seguramente en este momento usted querrá reclamar para que le devuelva el dinero. Tantas expectativas... ¡¿Para esto?! Tiene razón. Es que la respuesta importa poco. No importa saber que 1, 4, 9 y 16 son los números de las puertas que quedan abiertas. La respuesta solo nos dice lo que queríamos saber, es una anécdota. Podemos saber por qué, comprender; tenemos que saber más. ¡¿Por qué son esas puertas?! ¡¿Por qué 1, 4, 9 y 16?!

¿Qué poner en común?

La respuesta, sin dudas. Pero no solo eso. El Procedimiento 1 en sus variantes 1 y 2 es el más frecuente, y en su ejecución se producen errores que es un engorro corregir; hay que identificar dónde se produjeron y corregir desde ahí. Algo que es mejor hacer con la variante 3 del mismo procedimiento o con el Procedimiento 2. Así que la puesta en común puede iniciarse con espíritu de reparar errores. *"Recorrí los grupos de trabajo y tienen respuestas*

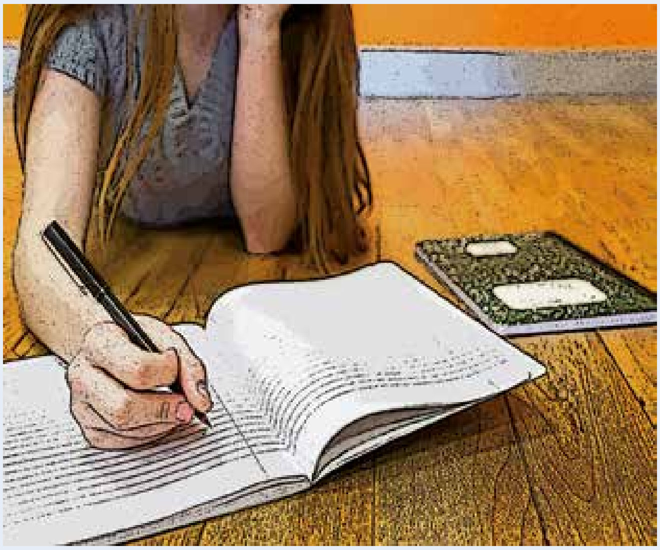
P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2		2		2		2		2
		3			3			3	

en común y otras no. Todos están de acuerdo en que la puerta 1, la 4 y la 9 quedan abiertas. Pero para algunos la puerta 10 queda abierta y para otros no. Lo mismo con la 16. ¿Cómo podemos hacer para estar seguros de que quedan cerradas o abiertas?"

Las dos opciones son los procedimientos 1 y 2. Los alumnos proponen uno u otro mecanismo para revisar la respuesta. Un camino para engarzar los diferentes procedimientos, en sus variantes, es seguir el orden en que los presenté. Pero ¿para qué poner en común las cinco variantes?

"Sin reconstruir el recorrido de los empleados, ¿cómo podemos decidir si la puerta 10 queda abierta o cerrada?"

> *–A la puerta 10 la tocan el 1, el 2, el 5 y el 10. Ninguno más.*
> Docente: *–¿Cómo saben eso? Los que hicieron empleado por empleado, ¿están de acuerdo?*
> *–El 1 toca todas las puertas, el 2 solo las pares, el 5 las múltiplo de 5 y el 10 solo la 10 y la 20.*
> Docente: *–Los que hicieron empleado por empleado, ¿están de acuerdo?*
> *–¡Es verdad, tenemos anotados esos mismos cambios! Es por el orden en que lo hacen... una no, la otra sí... Dos no y la otra sí, el 3 toca la puerta 3, la 6, la 9, las múltiplo de 3.*
> *–La 10 no porque no es múltiplo de 3.*
> Docente: *–¿Qué son entonces 1, 2, 5 y 10 del 10?*
> *–Divisores, son sus divisores. ¡Importan los divisores!*
> Docente: *–Tenemos los divisores pero no respondimos, ¿queda abierta o cerrada?*
> *–El 1 la abre, el 2 la cierra, el 5 la abre, el 10 la cierra. Queda cerrada. Y va a ser así si son 6 divisores, 8, 2. Si son pares.*
> Docente: *–El 5 es divisor...*
> *–Si son una cantidad par, no si son pares.*
> Docente: *–Entonces, ¿cómo podemos hacer para saber si una puerta queda cerrada o abierta?*
> *–Nos fijamos si la cantidad de divisores es par o impar.*
> *–Si son 2, 4, 6, par, queda cerrada. Si es impar queda abierta.*
> Docente: *–Vamos a escribirlo entonces...*



Pasar de las puertas y empleados a hablar de divisores, y si la cantidad de divisores es par o impar, es un momento feliz. Al iniciar el trabajo, los alumnos no sabían que esto iba de divisores, menos aún que importara la paridad en la cantidad. Pero en la gestión de la clase debemos alentar a que los alumnos dialoguen con el problema, yendo y viniendo de lo que saben a lo que pueden llegar a saber, poniendo a prueba las afirmaciones que hacen. Como sostiene Agrasar (2011): *«Se busca que los alumnos puedan formularse preguntas y producir conjeturas y afirmaciones de carácter general, determinando su campo de validez, y que puedan explicitar sus conocimientos matemáticos, estableciendo relaciones entre ellos».*

La conclusión elaborada sobre el final del diálogo le da un nuevo sentido a la respuesta. Las puertas 1, 4, 9 y 16 quedan abiertas porque son los únicos números naturales entre 1 y 20 que tienen una cantidad impar de divisores.

> *«Quien crea resultados matemáticos los despersonaliza y los descontextualiza para comunicarlos a sus colegas matemáticos; en un contexto eficaz de aprendizaje sucede un proceso inverso. El aprendiz tiene que hacer el resultado como propio, crear un camino personal para su comprensión y encarnarlo en el contexto de los problemas donde trabaje: el conocimiento debe convertirse en conocimiento personal.»* (D'Amore y Godino, 2007:201)

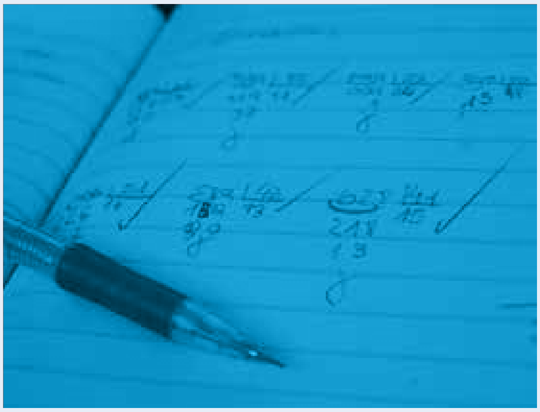
Y si fueran 50 puertas y 50 empleados, ¿cuál sería la siguiente puerta que queda abierta? En los términos de la conclusión, ¿cuál es el siguiente natural que tiene una cantidad impar de divisores? ¿Y el siguiente? ¿Cuáles son los naturales que tienen una cantidad impar de divisores? Esta batería de preguntas tiene el claro objetivo de hacer operativa la generalización. En la resolución del problema, los alumnos –con las intervenciones del docente– establecieron una caracterización de los números que deberíamos buscar, pero ¿habrá una forma de anticipar cuál será el próximo? ¿Y el siguiente?

Antes de abordar la generalización del problema les podemos pedir a los alumnos que comprueben la conclusión, proponiéndoles unas listas de verificaciones:

- Lista 1: 1, 2, 4, 6, 9, 11, 14, 16, 17 y 20
- Lista 2: 1, 3, 4, 7, 9, 10, 15, 16, 19 y 20
- Lista 3: 1, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 18 y 19.

El criterio para confeccionar las listas es que en cada una hay números primos, están 1, 4, 9 y 16, y además algunos que tienen cuatro y seis divisores.

Número	Divisores	Cantidad de divisores	¿La cantidad de divisores es impar?
1	1	1	Sí
2	1 y 2	2	No
3	1 y 3	2	No
4	1, 2 y 4	3	Sí
5	1 y 5	2	No
6	1, 2, 3 y 6	4	No
7	1 y 7	2	No
8	1, 2, 4 y 8	4	No
9	1, 3 y 9	3	Sí
10	1, 2, 5 y 10	4	No
11	1 y 11	2	No
12	1, 2, 3, 4, 6 y 12	6	No
13	1 y 13	2	No
14	1, 2, 7 y 14	4	No
15	1, 3, 5 y 15	4	No
16	1, 2, 4, 8 y 16	5	Sí
17	1 y 17	2	No
18	1, 2, 3, 6, 9 y 18	6	No
19	1 y 19	2	No
20	1, 2, 4, 5, 10 y 20	6	No



Además de la comprobación de la conjetura, este trabajo de verificación tiene un doble objetivo:

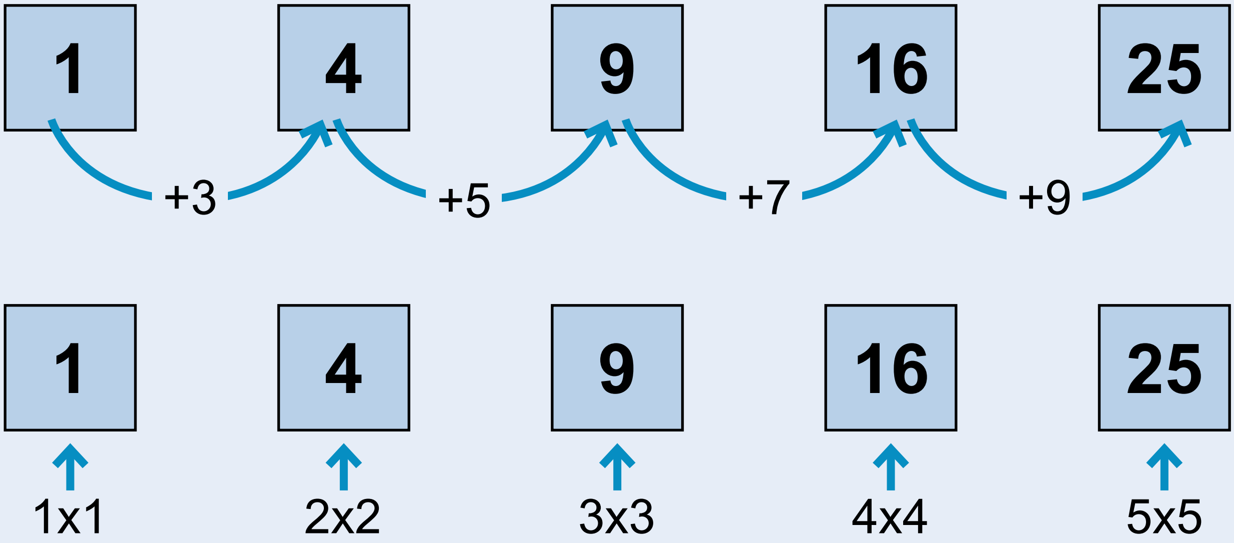
- ayudar a descontextualizar (dejando de lado las puertas y los empleados para hablar de divisores y cantidad impar de divisores);
- atender a las estrategias que se ponen en juego para encontrar los divisores.

El verdadero problema

Cerrado el lazo de la discusión anterior, el problema podría quedar ahí. Pero no. Al preguntarnos: *"¿Y si fueran 50 puertas y 50 empleados?"* y traducir esa pregunta en términos descontextualizados, es desafiante trabajar en lo siguiente: ¿Cuáles son los naturales que tienen una cantidad impar de divisores? Ya no hay dudas, menores que 20 son 1, 4, 9 y 16. ¿Qué tienen de especial además de *"puerta abierta"* y *"cantidad impar de divisores"*? Esto equivale a: *"¿Podemos encontrar el siguiente número con estas características sin tener que calcular los divisores 21, 22, 23, etc., hasta encontrarlo?"*.

Somos muy buenos buscando y encontrando patrones. Es una habilidad que, leí alguna vez, resulta bastante natural, porque nos ayudó evolutivamente a sobrevivir reconociendo rápidamente un tigre de unos pastos que se mueven... para algunos, los patrones numéricos son más evidentes que para otros, pero es seguro que a la mayoría nos entusiasman. Si se nos presenta la secuencia de números, descontextualizada, 1, 4, 9, 16, ¿cómo sigue?

En lugar de pensar en la cantidad de divisores, los alumnos ensayan buscando patrones en esta secuencia. Estos son dos de los argumentos que esgrimen:



Efectivamente 25 cumple con la caracterización, sus divisores son 1, 5 y 25. ¡Tiene solo tres! ¿Y cuál será el siguiente? En un argumento vienen sumando los impares consecutivos, a 25 tenemos que sumarle 11, lo que da 36. En el otro están elevando al cuadrado los naturales en orden, así que el próximo será el cuadrado de 6, 36. ¿Divisores de 36? 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36, 9 divisores. ¡Cumple!

Los dos mecanismos parecen predecir cómo encontrar números que tienen impar cantidad de divisores, pero (¿siempre hay un “pero”?) ¿será que siempre nos dan un número que lo cumple? ¿No hay más entre 21 y 24? ¿Y entre 26 y 35?

La producción de cualquiera de las dos reglas (para predecir el siguiente de la lista) tiene valor en sí misma, y quizá convenga cerrar con ella *“los números que tienen una cantidad de divisores impar son los cuadrados perfectos”*.

En nuestro rol sabemos que ambos mecanismos predicen, pero no explican. No adelantan que efectivamente esos números cumplan con la condición, y además no aseguran que los que quedan entre medio no la cumplan. Dependiendo del grupo de trabajo podemos ser incisivos en estos dos aspectos: es que algunas veces quizá sea solamente el viento el que mueve el pasto, y no un tigre...

En la verificación de los divisores del 1 al 20, los alumnos ponen a trabajar distintos conocimientos –*“1 y el número siempre están”*, *“este es primo, solo tiene dos divisores”*, *“18 es par, es divisible entre 2, está en la tabla del 3, es divisible entre 3, no está en la tabla del 4...”*, *“20 es múltiplo de 2, de 5 y de 10 porque termina en 0”*– que pasan por algunas conclusiones elaboradas de antemano, el uso de las tablas como tablas de múltiplos y los criterios de divisibilidad.

En otros casos, las estrategias se estabilizan alrededor de algoritmos (aunque no sean enseñados así) para decidir los divisores. Para encontrar los de 18 dividen, en orden creciente, 18 por 1, 2, 3..., 18, controlando que el resto sea 0 o no. Otros utilizan una variante un poco más elaborada que, si no fue enseñada, resulta de utilizar los conocimientos que tienen sobre múltiplos y divisores de una manera más flexible (aunque se estabilice después en un algoritmo): *“para encontrar los divisores de 18 sé que 1 y 18 lo son, ¿2 lo es? Sí, entonces, ¿2 por cuánto me da 18? Por 9. Entonces 9 también lo es. ¿3 lo es? Sí, porque 3 por 6 da 18. Los divisores son: 1 y 18, 2 y 9, 3 y 6”*.

Esta flexibilidad puede ser heredada de la experiencia en descomposiciones multiplicativas de los números y estar apoyada también en un conocimiento más específico sobre divisibilidad. *“Si en una división entera el divisor es divisor del dividendo* [porque el resto es 0] *entonces el cociente también es divisor del dividendo.”*[1]

[1] Parece un trabalenguas, porque la palabra divisor se utiliza con dos acepciones diferentes, por su rol en la división y para marcar una relación específica entre números.

Este último procedimiento contiene en sí mismo, un argumento generalizable a la hora de explicar por qué los cuadrados perfectos son los únicos naturales que tienen una cantidad impar de divisores. Al analizar su funcionamiento con, por ejemplo, 36:

- 1 y 36 (porque 1 y el mismo son divisores siempre);
- 2 y 18 (36 dividido 2 da resto cero y cociente 18, entonces 18 también es divisor);
- 3 y 12 (36 dividido 3 da resto cero y cociente 12, entonces 12 también es divisor);
- 4 y 9 (36 dividido 4 da resto cero y cociente 9, entonces 9 también es divisor);
- 6 y 6 (36 dividido 6 da resto cero y cociente 6, entonces 6 también es divisor).

La última viñeta evidencia una relación que valida la conclusión: *"como al buscar los divisores tengo una pareja en la que se repite el número, entonces no encontré dos divisores, sino uno solo"*. En otros términos: *"Si en la lista de divisores se encuentra la raíz cuadrada del número, entonces ese número tiene una cantidad impar de divisores"*. Y eso solo ocurre cuando el número es el cuadrado de ese divisor. *"Los únicos naturales que tienen una cantidad impar de divisores son los cuadrados perfectos."*

Debemos evaluar la oportunidad de llegar a una conclusión de este estilo –en la que un razonamiento deductivo como este, cierre el lazo– en función del contrato que se ha ido construyendo con los alumnos, de los conocimientos que efectivamente circulan en la clase.

Brousseau (1994:66) señala que es grande la tentación de saltar estas dos fases (contextualizar y ayudar a descontextualizar, por ejemplo) y enseñar directamente el saber como objeto cultural evitando este doble movimiento. *«En ese caso, se presenta el saber y el alumno se lo apropia como puede.»* (*idem*)

Es altamente probable que ante el mismo conocimiento, algunos libros de texto incluyan consignas como estas: "Lista los divisores de cada número del 1 al 20. ¿Cuáles tienen una cantidad impar de divisores?" o "Los cuadrados perfectos son los únicos naturales que tienen una cantidad impar de divisores: anota los primeros cuatro y comprueba que esto es así." Y en nuestras prácticas tenemos que conciliar esas dos tensiones: quedarnos en el contexto de las puertas (qué puertas quedan abiertas) o presentar el conocimiento para después "aplicarlo".

En este recorrido, el problema inicial tiene por objetivo que se utilicen los conocimientos disponibles en forma de procedimientos, la puesta en común es de respuestas y en ella promovemos, desde la "duda" sobre alguna de ellas, pasar de un procedimiento "mecánico" a otro que ponga en juego conocimientos relacionados al objetivo matemático. En la resolución del problema original, el conocimiento sobre divisores es contextualizado (el alumno lo recontextualiza), y en la puesta en común movilizamos para descontextualizar promoviendo, a su vez, la generalización. Lo más interesante es que el conocimiento matemático nuevo emerge como respuesta a la generalización que promovimos al descontextualizar. Y siempre se puede profundizar más: ¿cuáles son los números que tienen exactamente tres divisores?

Referencias bibliográficas

AGRASAR, Mónica (2011): "Articular lo que saben los alumnos: un desafío necesario para abordar lo nuevo" en A. L. Díaz (coord.): *Enseñar Matemáticas en la Escuela Media*, pp. 79-102. Buenos Aires: Ed. Biblos. Claves para la Formación Docente.

BENTANCOR BIAGAS, Gustavo (2013): *Problemas. Olimpíada Matemática de Casavalle*. Montevideo: Ediciones de la Plaza.

BROUSSEAU, Guy (1994): "Los diferentes roles del maestro" en C. Parra e I. Saiz (comps.) *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Ed. Paidós Educador.

D'AMORE, Bruno; GODINO, Juan D. (2007): "El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la Teoría Antropológica en Didáctica de la Matemática" en *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 10, Nº 2 (Junio), pp. 191-218. En línea: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v10n2/v10n2a2.pdf

DE OLIVEIRA SANTOS, José Plínio (1998): *Introdução à Teoria dos Números*. Río de Janeiro: IMPA.

STEWART, Ian (2005): *De aquí al infinito. Las matemáticas de hoy*. Barcelona: Ed. Crítica.

ZAZKIS, Rina (2001): "Múltiplos, divisores y factores: Explorando la red de conexiones de los estudiantes" en *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 4, Nº 1 (Marzo), pp. 63-92. En línea: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33540104