El círculo

¿Es un polígono de infinitos lados?

Matías Guichón Díaz | Fabián Luaces Noria | Profesores de Matemática. Docentes en Formación de Profesores (CFE) y Formadores del Equipo de Matemática de PAEPU.

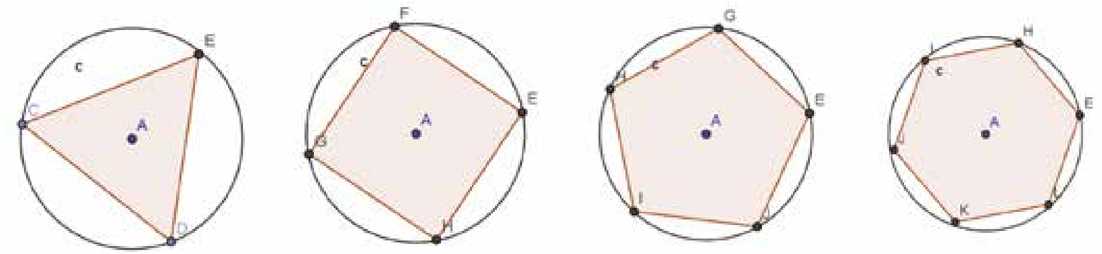
La pregunta que titula este artículo es bastante frecuente entre maestros. En varias oportunidades (en jornadas con maestros, en conversaciones de pasillo o en charlas informales) hemos recibido esa pregunta como consulta, y la respuesta es **NO**, y en cada oportunidad intentamos argumentar a favor de esta respuesta. En estas líneas intentaremos discutir esta creencia, mito o "falso teorema", para hacer públicos estos argumentos.

Una mirada a los orígenes

En primer lugar nos preguntamos por el origen de "este mito". ¿Por qué se piensa en el círculo como un polígono de infinitos lados? ¿Qué es lo que da origen a esta confusión? ¿Hay alguna práctica que dé lugar a esta falsa generalización?

Al preguntar a algunos maestros, profesores, al revisar libros y páginas de internet, encontramos que un posible origen de esta creencia radica en torno al cálculo del área del círculo. Analicemos esta relación entre los polígonos, el infinito y el área del círculo.

Nos proponemos calcular el área de un círculo C. Para ello consideramos **polígonos regulares *inscriptos***[1] en la circunferencia (P_3 es el triángulo, P_4 es el cuadrado, y así sucesivamente).



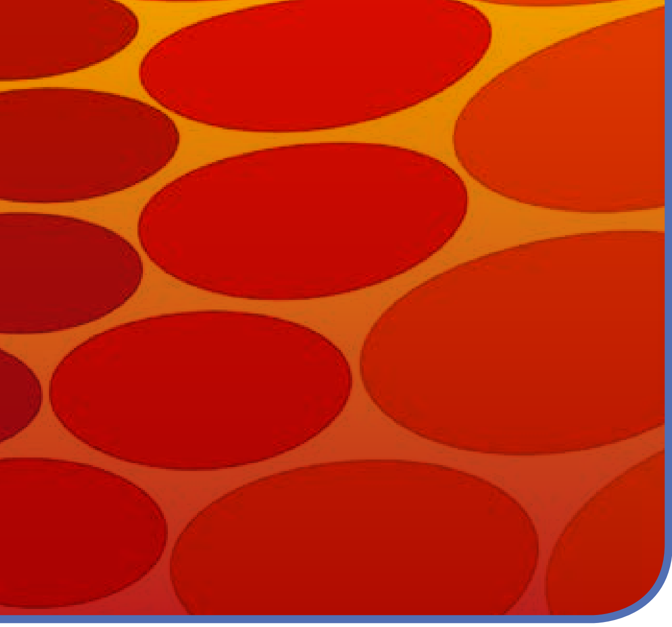
Las siguientes propiedades son fáciles de observar en las figuras (y pueden demostrarse):

Área (P_3) < *Área* (C) *Área* (P_4) < *Área* (C) *Área* (P_5) < *Área* (C) Y así sucesivamente.	El área de cada uno de los polígonos (P_3, P_4, P_5,...) es menor que el área del círculo *C*. Más aún, la diferencia entre las áreas es la parte del círculo que ha quedado sin pintar en cada una de las figuras.
Área (P_3) < *Área* (P_4) < *Área* (P_5) < ...	Cuanto mayor número de lados tengan los polígonos, mayores serán las áreas. Parece que al aumentar el número de lados de los polígonos, las áreas de los mismos serán cada vez más grandes, ya que la parte del círculo que no está pintada es cada vez menor.

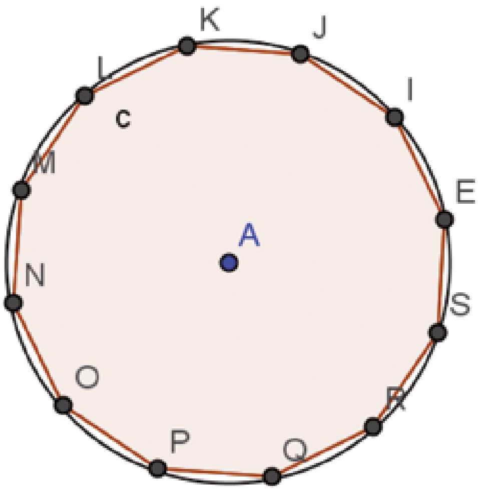
Otro hecho no menor que los anteriores es el que nos ocupa en esta parte del artículo: *"al aumentar infinitamente el número de lados de los polígonos, el área de estos tiende a ser igual al área del círculo"*. En símbolos:

$$\lim_{n \to \infty} \text{Área}\,(P_n) = \text{Área}\,(C).$$

[1] Un polígono es inscripto a una circunferencia si todos sus vértices pertenecen a ella.



En las figuras, la evidencia está dada por las regiones pintadas: cuantos más lados tienen los polígonos regulares que inscribimos, mayor es la parte del círculo que cubren, mayor es su área. Si nos detenemos en las regiones no sombreadas, observamos que al aumentar el número de lados de estos polígonos, la región no pintada no solo es cada vez menor, sino que tiende a ser insignificante. Esto puede verse en la siguiente figura, en la que se ha representado un polígono regular de doce lados.



Por todo lo anterior podríamos decir que *"el área de los polígonos regulares inscriptos en una circunferencia tiende al área del círculo, al aumentar indefinidamente el número de sus lados"*. ¿Pero qué es lo que falla entonces?

Si prestamos atención, la conclusión anterior hace referencia a números y a figuras geométricas.

Números	Figuras Geométricas
El área de los polígonos. El área del círculo.	Los polígonos. El círculo.

La propiedad antes enunciada relaciona números: nos dice que los números asignados al medir el "área de polígonos" tienden al valor del número "área del círculo". ¿El enunciado nos permite afirmar que el círculo es un polígono de infinitos lados? Como anticipamos al principio, la respuesta es no. Intentaremos discutir este hecho en la siguiente sección.

Por otro lado, la misma estrategia puede utilizarse para relacionar el perímetro de estos polígonos con el perímetro del círculo, o sea, con su circunferencia.

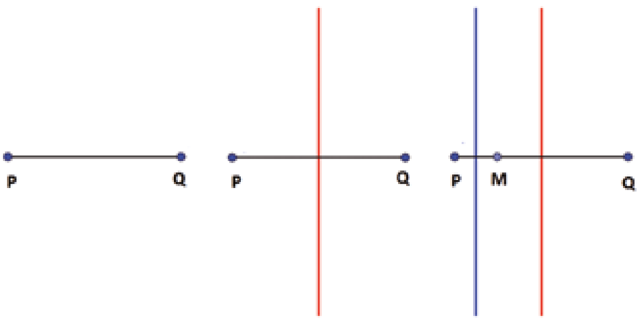
Perímetro (P_3) < *Perímetro* (C) *Perímetro* (P_4) < *Perímetro* (C) *Perímetro* (P_5) < *Perímetro* (C) Y así sucesivamente.	El perímetro de cada uno de los polígonos inscriptos es menor que la longitud de la circunferencia.
Perímetro (P_3) < *Perímetro* (P_4) < *Perímetro* (P_5) < ...	Cuanto mayor es el número de lados de los polígonos inscriptos, mayor es su perímetro.

Del mismo modo podríamos deducir que el perímetro de estos polígonos, que es un número, tiende a la longitud de la circunferencia. Otra vez tenemos una relación entre números. Pero este aparte es para mostrar que involucrar el infinito puede derivar en cuestiones *peliagudas*: al aumentar el número de lados de los polígonos inscriptos podemos visualizar que la longitud de estos lados es menor y se acerca indefinidamente a valer cero. En otras palabras, cuando la cantidad de lados tiende a infinito, la longitud de esos lados tiende a valer cero, ¿y cómo es que si sumamos estas longitudes infinitesimales para calcular el perímetro termina siendo *diámetro x* π? Los argumentos utilizados formalmente para deducir este resultado, en el que **quizá** tenga sentido pensar en el círculo como un polígono de infinitos lados, necesitan de un puente a otro campo de estudio de las matemáticas, el Cálculo Infinitesimal, y no estará disponible hasta Bachillerato.

El círculo, ¿puede ser un polígono?

Al estudiar matemáticas ingresamos en una racionalidad diferente que tiene sus reglas de razonamiento particulares y no pueden aplicarse a otros campos de conocimiento con igual validez. Quizá no seamos capaces de decir que el círculo no es un polígono de manera directa, pero podemos pensar que sí lo es, y desde allí deducir algunas consecuencias hasta que estas se encuentren en contradicción con otras cosas que sí sabemos. Así, lo que supusimos (que el círculo es un polígono) no puede ser verdad. Si bien esta cadena de deducciones puede resultar un tanto abstrusa, es una herramienta muy potente y la utilizamos en variadas oportunidades.

Al suponer que el círculo es un polígono tenemos que considerar que todos los puntos de su contorno están a la misma distancia de un punto en particular: el centro. Veamos adónde nos lleva esto, eligiendo uno de sus "supuestos lados" para razonar: todos los puntos del segmento PQ deben estar a la misma distancia del centro de la circunferencia, algo que en particular los propios P y Q deben cumplir. Nosotros sabemos que los puntos que están a la misma distancia de los extremos de un segmento conforman la mediatriz de ese segmento: entonces, el centro tiene que estar en esa mediatriz de PQ. Eligiendo un punto M interior al segmento tenemos que como M también pertenece a la circunferencia (que es el contorno del "polígono"), el centro debe estar en la mediatriz del segmento PM.

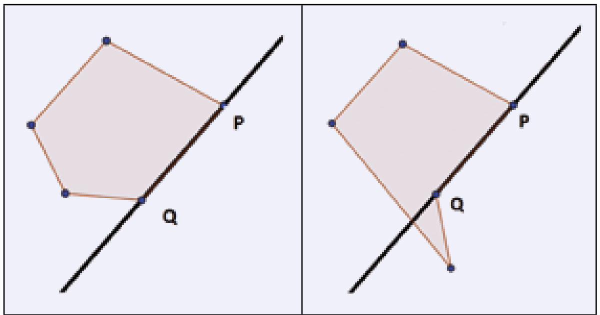


¡El centro debe pertenecer a la vez a dos rectas, paralelas, diferentes! Y eso es imposible. Pero todo nuestro razonamiento está bien. El problema es de nuestra hipótesis inicial: que el círculo es un polígono. Así que esto no puede ser verdad.

El círculo NO es un polígono

Como hicimos en el apartado anterior, supongamos que el círculo es uno de estos polígonos inscriptos en la circunferencia, y recordemos algunas propiedades que ya conocemos sobre estos polígonos. Nos preguntaremos si el círculo cumple las propiedades de los polígonos.

- *Si PQ es un lado de un polígono (convexo), el polígono se encuentra a un mismo lado de la recta PQ.*
  Dicho de otra forma nos dice que *"la recta que contiene un lado de un polígono, deja al polígono en el mismo semiplano"*. Esta propiedad caracteriza los polígonos convexos, y puede observarse en la siguiente figura.

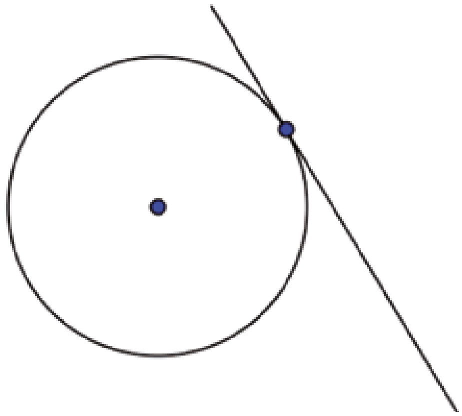


Polígono Convexo	**Polígono no Convexo**
El polígono está contenido en un semiplano, con respecto a la recta PQ.	El polígono tiene una parte en un semiplano con respecto a la recta PQ, y otra parte en el otro semiplano. No está incluido en uno de ellos, sino que se interseca en ambos semiplanos.

Como ya sabemos que el círculo es una figura convexa, nos preguntamos ahora si es un polígono convexo (ya que por ser una figura convexa, no puede ser un polígono no convexo). Nos preguntamos entonces si el círculo cumple esta propiedad que caracteriza a los polígonos convexos.

En primer lugar observemos que si el círculo fuera un polígono, *todos* los puntos de la circunferencia serían vértices del mismo. Si tomamos dos puntos P y Q sobre la circunferencia, el segmento PQ es una cuerda de la misma; y como ya sabemos, el círculo no está contenido en un semiplano de borde PQ. Dicho de otra forma, la recta PQ divide al círculo en dos partes, una contenida en cada semiplano de borde PQ.

¿Existen rectas que corten al círculo y además lo dejen en un mismo semiplano? Sí, estas rectas son las tangentes al círculo. Las tangentes al círculo lo cortan en un solo punto, y lo dejan contenido en un solo semiplano. Entonces, ¿estas tangentes contienen a los lados del círculo como polígono? ¿Pueden ser los lados, si lo cortan en un solo punto?

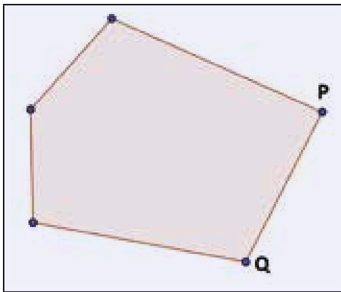
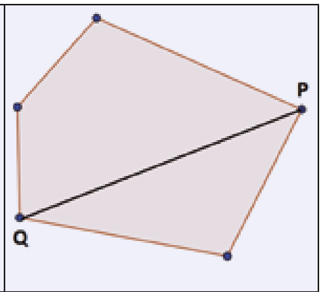


Como sabemos, los lados contienen por lo menos dos puntos del polígono (en realidad, infinitos), ya que un lado queda determinado por dos vértices "consecutivos"; por lo tanto, las tangentes no son los "lados del círculo". Esto implica entonces que los círculos **NO TIENEN LADOS**, y por tanto **NO SON POLÍGONOS**.

Lo anterior da lugar a cuestionar la siguiente propiedad de los polígonos.

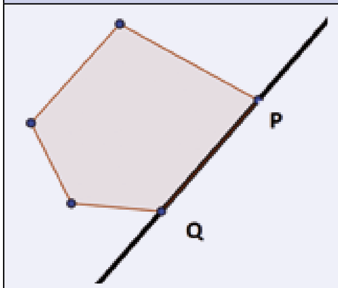
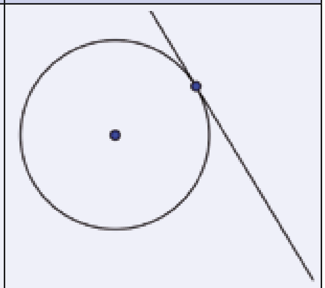
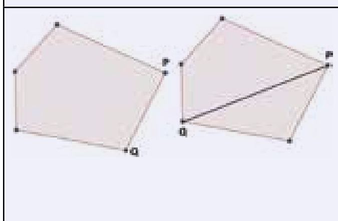
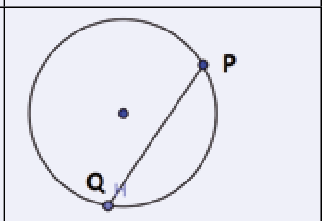
► *Si P y Q son vértices de un polígono, entonces el segmento PQ es un lado o una diagonal del mismo.*

Esta propiedad no es más que una reformulación de la definición de diagonal de un polígono como *"segmento que une dos vértices no consecutivos"*. Ya que un lado es un segmento cuyos extremos son consecutivos, y una diagonal es un segmento cuyos extremos son vértices no consecutivos, entonces: si un segmento une dos vértices de un polígono, este segmento será un lado o una diagonal, dependiendo de si los vértices son consecutivos o no (como puede verse en la figura).

	
Como *P* y *Q* son consecutivos, el segmento *PQ* es un lado del polígono.	Como *P* y *Q* no son consecutivos, el segmento *PQ* es una diagonal del polígono.

Como ya discutimos anteriormente, elegidos dos puntos *P* y *Q* de la circunferencia, estos no determinan un lado. A partir de la caracterización de los polígonos convexos que ya realizamos, podríamos decir que mientras en un polígono convexo, la recta que une dos vértices puede dejar al polígono a un mismo lado de ella, en el círculo no ocurre lo mismo.

Resumimos estas diferencias en la siguiente tabla.

Polígono Convexo	Círculo
	
Los lados dejan al polígono en un mismo semiplano, y lo cortan al menos en dos puntos (los vértices).	Las únicas rectas que dejan al círculo en un mismo semiplano y lo cortan, son las tangentes, pero lo cortan solo en un punto (y no en dos).
	
Si *P* y *Q* son puntos del borde del polígono, entonces el segmento *PQ* puede dejar el polígono de un mismo lado, o atravesar al polígono.	Si *P* y *Q* son puntos del borde del círculo (circunferencia), entonces el segmento *PQ* atraviesa el círculo, no lo deja en un mismo semiplano.

Por todo lo anterior nos atrevemos a afirmar no solo que el círculo no es un polígono de infinitos lados, sino que los polígonos de infinitos lados no existen. Las definiciones que revisamos en algunos libros[2] ponen especial énfasis en que la cantidad de vértices (y, por tanto, de lados) debe ser una cantidad finita. Como intuimos al comienzo del artículo, el problema está en ese "paso al límite" que se desliza al pensar el círculo con una infinita cantidad de lados.

Otros procesos infinitos

Nos atrevemos a decir que esta "falsa generalización" tiene implícita una regla que, en general, es falsa: en los procesos infinitos, el resultado mantiene las características de cada uno de los pasos.

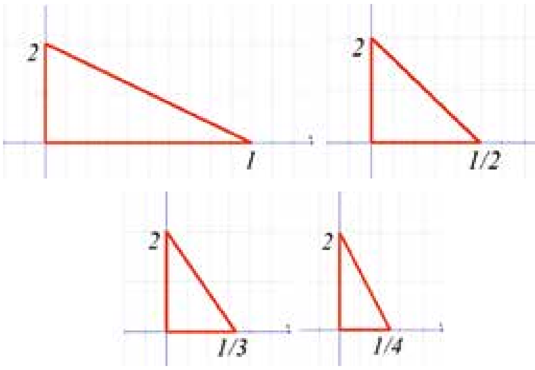
Detengámonos en este punto para cerrar la discusión.

En este caso, a partir de algunos polígonos regulares tomamos límite e hicimos tender la cantidad de lados a infinito (con el objetivo de calcular el área del círculo). Como resultado obtenemos que los polígonos "tienden" a parecerse al círculo pero, como discutimos antes, el círculo no es un polígono. Esto significa que los elementos de la sucesión son polígonos, pero el límite de la misma no lo es; al hacer infinito el proceso, su resultado (el círculo) no mantiene las propiedades de los polígonos.

Esto es bastante frecuente en matemática, como podemos ver en los siguientes ejemplos.

- Consideramos la sucesión de números 1, 1/2, 1/3, 1/4,... 1/*n*...
  Esta sucesión tiene infinitos números (porque los naturales son infinitos). Cada uno de estos números es un número positivo y es el inverso de un natural (por ejemplo, 1/5 es el inverso de 5). Sin embargo, si hacemos tender la *n* a infinito, obtenemos como resultado 0. Para nuestra sorpresa, el 0 no es un número positivo y tampoco es inverso de un natural. Así, el límite de esta sucesión no "hereda" las características que observamos que sí tenían los elementos de la misma.

- Consideremos ahora otro ejemplo geométrico. Fijamos nuestra atención en los triángulos de las figuras siguientes.



Como se puede observar, la medida de uno de los lados va decreciendo y vale sucesivamente 1, 1/2, 1/3, 1/4,... No es difícil anticipar que si continuamos infinitamente con este proceso, los triángulos tienden a confundirse con un segmento vertical. De nuevo estamos ante una sucesión cuyos elementos tienen ciertas características (en este caso, son triángulos), mientras que el límite de la misma no las tiene (es un segmento, no es un triángulo).

Si bien en un contexto diferente de trabajo puede tener sentido considerar al círculo como un polígono de infinitos lados, creemos que se contradice con los conocimientos geométricos que están disponibles para el trabajo habitual. Conceptualizarlo de esa forma en nuestras clases, entra en contradicción con la definición de polígono y también con la definición de circunferencia. Y esto es demasiado si consideramos que son los dos conceptos que queríamos vincular diciendo "el círculo es un polígono de infinitos lados"...

Por otra parte, es importante destacar que esta discusión no pretende convertirse en objeto de enseñanza, sino aportar elementos a los maestros para "arrojar luz" sobre la creencia de que el círculo es un polígono de infinitos lados. Con esto queremos decir que nos conformamos con "sumar" a la discusión sobre este aspecto, con el fin de aclararlo.

Bibliografía

PUIG ADAM, Pedro (1986): *Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos*. Madrid: Euler Editorial.

SEVERI, Francesco (1965): *Elementos de Geometría. Tomo 1*. Barcelona: Ed. Labor.

[2] Por ejemplo, véase Puig Adam (1986:12).