El concepto de promedio

Una mirada desde el trabajo con sus distintas representaciones

Graciela Arámburu Reck | Maestra y Formadora en Didáctica de Matemática.

Trabajo elaborado en el marco del Curso de Apoyo a la Calidad del Egreso Escolar, PAEPU (2012).

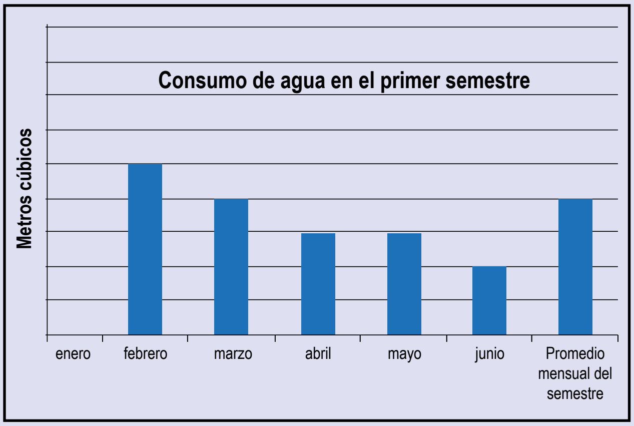
En esta instancia se pretende abordar aspectos que son inherentes a la enseñanza de la Matemática y que no siempre son objeto de análisis. Se centrará la atención en la planificación de actividades de producción de escrituras matemáticas que impliquen el trabajo con distintas representaciones semióticas, para contribuir a la conceptualización de la media aritmética o promedio de datos.

¿Qué se escribe en la escuela en Matemática? Se escriben representaciones semióticas en diferente tipo de registros: lenguaje natural, numérico (enteros, expresiones decimales, fraccionarias, porcentaje), figural (figuras geométricas), gráfico (representaciones pictográficas, icónicas, gráficos), algebraico. En muchas circunstancias esas representaciones se usan, pero no siempre se planifican actividades para tomarlas como objeto de enseñanza.

Diferentes investigaciones aportan acerca de la importancia de trabajar con distintas representaciones, por lo que cada una de ellas agrega para la construcción del concepto objeto de enseñanza (en este caso "promedio"). Chamorro (2007) expresa: *«...cada representación nos muestra distintas propiedades de los objetos, lo que nos ayuda a potenciar la capacidad mental de los alumnos para coordinar distintos aspectos que concurren en las situaciones problema, competencia que resulta fundamental para la adaptación a situaciones nuevas»*.

En primer lugar se presentará una actividad en la que se prioriza la representación en el registro gráfico. En la misma no solo aparece la representación gráfica en la consigna, sino que además se exige llegar a la solución en este mismo tipo de registro sin recurrir para ello a trabajar con representaciones numéricas. La consigna plantea:

Esta gráfica corresponde al consumo de agua en la casa de Lucía durante el primer semestre de este año. Se borró la columna que corresponde al consumo del mes de enero.
La última columna muestra el promedio mensual de gasto de agua de los seis meses (incluye el gasto correspondiente al mes de enero). ¿Cómo habrá sido el consumo de agua en enero para que el promedio mensual del semestre fuese el que aparece allí? Dibuja la columna que corresponde al consumo de enero.
Una alumna logró resolverlo correctamente sin usar números. ¿Cómo lo habrá realizado?



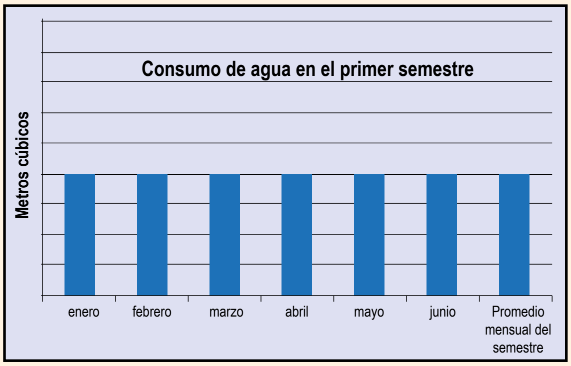
La actividad anterior, diferente a la que frecuentemente se propone en la escuela (con datos numéricos), exige atender otros aspectos que hacen al concepto de promedio. En general se les solicita averiguar el promedio (en un registro numérico) cuando se dan todos los datos necesarios para su cálculo. Propuestas de este tipo nos llevan a preguntarnos: ¿cuáles son las ideas que los niños construyen en los años escolares respecto a la idea de promedio? En reiteradas situaciones se observa que el aprendizaje de los niños se limita a la memorización de un algoritmo de cálculo, que les resulta suficiente para resolver las actividades que habitualmente se les proponen.

¿Qué sucede cuando, como en la actividad planteada, se problematiza la situación y el promedio ya está dado, y lo que se pide es averiguar un dato? ¿Y cómo se "complejiza" si, además, se solicita que se resuelva sin usar números? Ello exige pensarlo dentro del registro gráfico y requiere plantearse: ¿qué significa que el promedio esté representado por una barra? ¿Qué relación guarda su altura con las alturas de las otras barras? ¿Es posible llegar a la solución sin usar números? Y a partir de todo lo anterior ¿cuáles podrían ser los procedimientos de resolución?

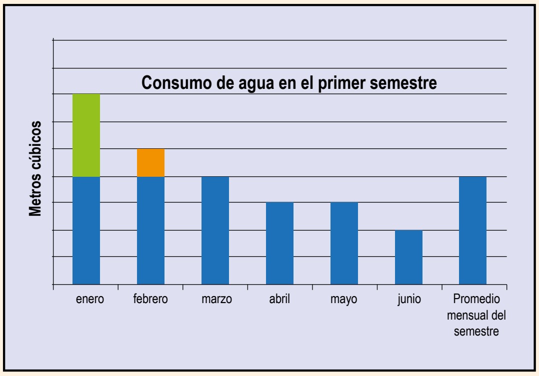
La solución de la tarea exige producir escrituras matemáticas en un determinado registro (dibujar una barra del gráfico) pero, previamente, exige una lectura para interpretar la consigna. Corresponde preguntarse si estas representaciones gráficas son objetos de enseñanza.

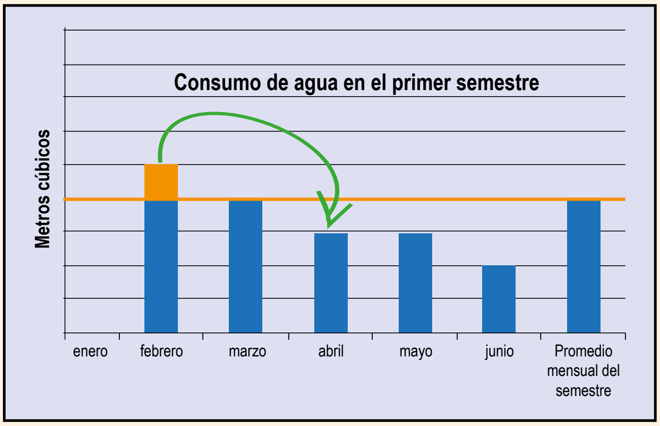
Para resolver la situación planteada es preciso realizar transformaciones en el gráfico dado, y ello exige trabajar con otras representaciones sin hacer un cambio de registro (numérico). Para lograrlo se requiere establecer una relación: que el consumo del semestre equivale al que se tendría si los seis consumos mensuales fuesen iguales al promedio (como se presenta en el siguiente gráfico). El establecimiento de esta relación posibilitará la realización de transformaciones de las representaciones, a partir del gráfico del problema, para poder llegar a la solución.

Se dice frecuentemente que para los alumnos es más sencillo trabajar en el registro gráfico que en el numérico. Pero ¿qué sucede en este caso cuando se impide el uso del registro numérico? Aun para muchos adultos, la situación no es fácil de resolver.

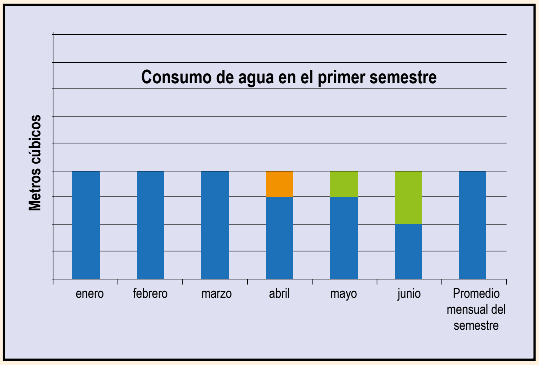


Si la solución se encuentra en lograr, a partir de los datos dados, igualar la altura de todas las barras a la del promedio, es posible que el alumno se plantee: ¿en qué meses el consumo superó al promedio? ¿Qué puedo hacer entonces? Ese "trozo" de barra que queda por encima de la media aritmética o promedio posiblemente le permitirá completar la de algún mes cuyo consumo fue inferior a ella.





¿Es suficiente ese "trozo" de barra (ahora anaranjado) para igualar todas las demás barras a la del promedio? Si en las columnas dadas no se dispone de otros rectángulos para completar las demás barras que están por debajo de la media (mayo y junio), ¿cómo debe ser la barra de enero para poder igualar todas las barras a la del promedio? Para ello, el alumno podría ir agregando a la columna de enero, por encima de la media, los rectángulos necesarios para igualar todas las columnas a la del promedio. Ese procedimiento de igualar la altura de las barras podría permitir arribar a la solución y concluir, por ejemplo, que el consumo de enero es igual a la suma de los consumos de marzo y abril, o mayor que cualquiera de los consumos de los otros meses.

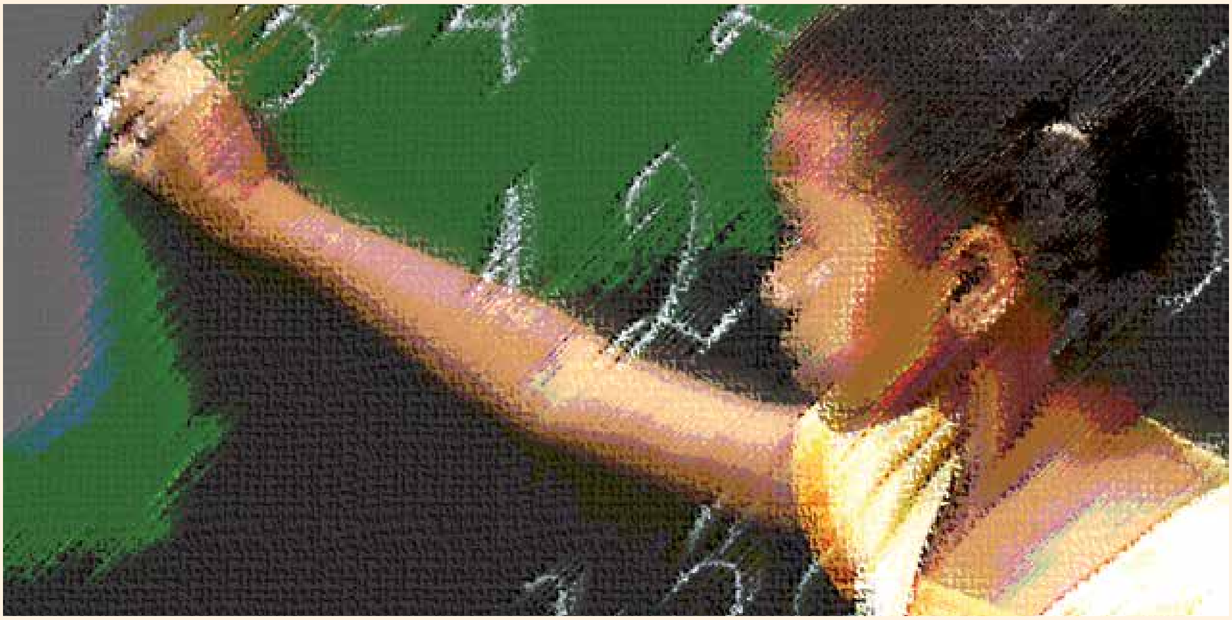


Aquí sería interesante preguntarse: ¿qué otras respuestas podrían dar los alumnos, si en ellas no está permitido utilizar números?

Quizás algún alumno considere, erróneamente, que el consumo de enero debería ser igual al de abril porque la cantidad de "trozos" que faltan para igualar las columnas dadas al promedio (tres) permite conformar una barra como la de ese mes. Ello daría cuenta de una aproximación a la construcción del concepto de promedio, que exigiría ser revisada pensando posibles intervenciones.

La decisión de no poner los valores numéricos en el eje de las ordenadas, fue tomada para evitar inducir a resolver la situación mediante la realización de cálculos o conteos.

Igualmente, no obstante la condición planteada de no usar números, con frecuencia se recurre a usarlos en situaciones de conteo y/o cálculo atribuyendo valor "1" al consumo representado por el rectángulo de las barras contenido entre dos líneas consecutivas de la gráfica. De este modo, en la primera actividad podrían asociar el 5 con el consumo de febrero, el 4 con el de marzo y así sucesivamente.



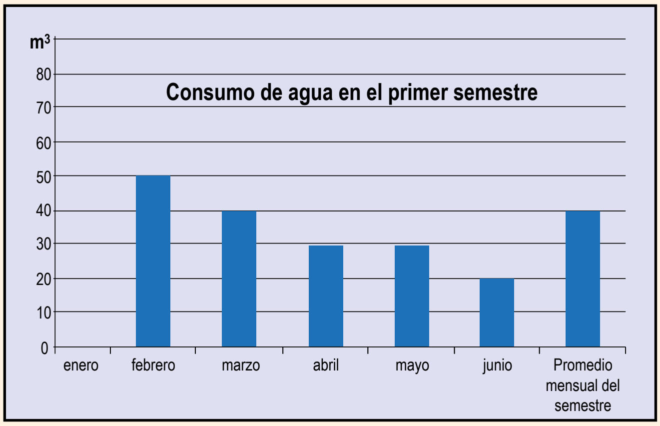
Así, un alumno podría plantear:

$$\frac{?+5+4+3+3+2}{6} = 4$$

y probando con diferentes números podría, aún por ensayo y error, resolver la situación planteada.

También con esos números es posible que desarrolle otro procedimiento. Si ha relacionado que el consumo del semestre es seis veces el que corresponde al promedio (asociándolo al 4) podría llegar a pensar que en el semestre se consumieron 24. Entonces bastaría sumar el consumo de los cinco meses y buscar su diferencia con 24. Este procedimiento da cuenta de una conceptualización de promedio que va más allá de la mera aplicación de un algoritmo.

Pero analicemos, si el propósito estuviese en que la resolución de la situación se realizara utilizando un registro numérico, ¿bastaría con presentar los valores numéricos en la ordenada como se muestra en el siguiente gráfico? ¿No podría igualmente el alumno resolverlo trabajando únicamente con representaciones gráficas?



¿Qué cambios deberían realizarse en la primera consigna para que necesariamente la resolución exigiese utilizar únicamente el registro numérico? Una posible presentación de la actividad podría ser la siguiente:

Este cuadro corresponde al consumo de agua en la casa de Lucía durante el primer semestre de este año. Se borró el número que corresponde al consumo del mes de enero. Averígualo y completa el cuadro.

Metros cúbicos de agua consumidos en el primer semestre del año 2013						
Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Promedio mensual del semestre
	50	40	30	30	20	40

Al saber que el promedio mensual del consumo del semestre es 40 metros cúbicos, el alumno debería poder inferir que ello significa que en el semestre se consumió el séxtuplo del promedio, o sea, 240 metros cúbicos. Sumando los valores dados de febrero a junio (170 metros cúbicos) es posible que averigüe (mediante la sustracción o el "sobreconteo") que el consumo de enero debió ser de 70 metros cúbicos. Este cálculo, aparentemente sencillo, solo es posible si la conceptualización respecto a "promedio" lo habilita. Esa inferencia (que el consumo del semestre es el séxtuplo de 40 porque ese promedio se calcula a partir de seis datos) no surge fácilmente cuando el promedio solamente se asocia a un algoritmo de cálculo, y el alumno no posee diferentes acercamientos a ese objeto matemático desde el trabajo con distintas representaciones.

Pero ¿cómo llevar al registro numérico la estrategia de resolución utilizada en la representación gráfica al igualar la altura de las barras a la del promedio?

¿Podrían pensarlo así los alumnos?

Metros cúbicos de agua consumidos en el primer semestre del año 2013						
Enero	**Febrero**	**Marzo**	**Abril**	**Mayo**	**Junio**	**Promedio mensual del semestre**
40 + 10 + 20 = 70	50 = 40 + 10	40	30	30	20	40

Enero	**Febrero**	**Marzo**	**Abril**	**Mayo**	**Junio**	**Promedio mensual del semestre**
40	40	40	30 + 10	30 + 10	20 + 20 = 40	40

La desagregación aditiva de los consumos que exceden al promedio permite identificar con cuántos metros cúbicos se cuenta (coloreado con rojo) para poder igualar los otros consumos al promedio. Con esa redistribución de los metros es posible completar el consumo de enero de modo que este permita igualar a la media, aquellos meses que están aún por debajo de ella (mayo y junio).

La proposición de otras actividades en la secuencia que se organice debería seguir problematizando el concepto de promedio. ¿Qué sucedería, por ejemplo, si se presentase una propuesta similar a la primera planteada, pero que la barra que se hubiera borrado fuese una en la que el consumo sea inferior al promedio. ¿Cómo resolverla? ¿Serviría la estrategia anterior? Si las integrase en una secuencia, ¿cuál pondría antes?

Las actividades con diferentes registros enriquecen el proceso de conceptualización de cualquier objeto matemático, ya que la transformación de un registro a otro, o aun a la interna de uno determinado, exige el desarrollo de distintos procesos cognitivos.

Asimismo, en lenguaje natural los alumnos podrían registrar algunas relaciones construidas por ellos. Por ejemplo:

> ***El promedio es un número que es siempre mayor que el dato menor, y menor que el dato mayor que se promedia.***
> ***El consumo de agua del semestre es el séxtuplo del promedio mensual durante esa mitad del año.***

Esta transformación de una representación a otra (gráfica y/o numérica a lenguaje natural) exige también importantes esfuerzos cognitivos.

«En matemática, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas.» (D'Amore, 2002)

«La comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación...» (Duval, 1998)

Diferentes investigaciones desarrolladas dejan de manifiesto que los estudiantes que demuestran buen desempeño en los procesos de transformación dentro de un registro, o de un registro a otro, evidencian facilidad en la representación y evocación del objeto matemático en diferentes formas. Por ello nos preguntamos: ¿qué actividades se plantean en la enseñanza de los distintos objetos matemáticos que requieran procesos de transformación de registros, de modo de enriquecer su conceptualización? Q

Referencias bibliográficas

CHAMORRO, Ma del Carmen (2007): “Los registros de representación semiótica en la resolución de problemas matemáticos” en T. Álvarez Angulo (dir. edit.): *La competencia en comunicación lingüística en las áreas del currículo*, pp. 129-145. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

D'AMORE, Bruno (2002): “La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución” en *Tecné, Episteme y Didaxis. Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*, Nº 11, pp. 63-71. En línea: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/440%20complejidad%20de%20la%20noetica%20y%20falta%20de%20devolucion.pdf

DUVAL, Raymond (1998): “Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento” en F. Hitt (ed.): *Investigaciones en Matemática Educativa II*, pp. 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamérica.