¿Ser o no ser?

Entre las figuras del espacio y las validaciones

Carla Damisa | Profesora de Matemática en Institutos Normales de Montevideo.
Milena Martín | Maestra. Formadora de Matemática en el Instituto de Formación en Servicio CEIP. Contenidista del portal Uruguay Educa, Área de Matemática.
Virginia Méndez | Maestra. Formadora de Matemática en el Instituto de Formación en Servicio CEIP.

Integrantes del Equipo de Investigación e Innovación en Enseñanza de la Matemática, Revista *QUEHACER EDUCATIVO*.

El presente artículo refiere al trabajo en quinto y sexto grado; haremos foco en el proceso de validación en matemática. Abordaremos la validación desde el trabajo geométrico, en particular con figuras del espacio. Las actividades que se presentan atienden distintos tipos de representaciones de figuras del espacio y algunas propiedades de prismas rectos, oblicuos y pirámides.

Al recorrer estas actividades pretendemos identificar las propiedades de esas figuras que están en juego. También se tiene como objetivo establecer un cierto conjunto mínimo de características que definan a las figuras del espacio con las que estamos trabajando.

A su vez, la idea es que a medida que realicen las actividades, los alumnos puedan establecer argumentaciones con el fin de validar su trabajo, ya sea a través de descripciones, explicaciones o distintos tipos de pruebas. Asumimos que el trabajo con la validación en matemática ayuda a desarrollar un alumno autónomo en relación al hacer matemático.

Para que una situación pueda ser considerada como un problema geométrico debe cumplir ciertas condiciones.

- *«Para resolver el problema se ponen en juego las propiedades de los objetos geométricos.*
- *El problema pone en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico sino a un espacio conceptualizado; las figuras-dibujos trazadas por este sujeto no hacen más que representarlo.*
- *La función que cumplen los dibujos en la resolución del problema no es la de permitir arribar a la respuesta por simple constatación sensorial.*
- *La validación de la respuesta dada al problema –es decir, la decisión autónoma del alumno acerca de la verdad o falsedad de su respuesta– no se establece empíricamente, sino que se apoya en las propiedades de los objetos geométricos. Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras producen nuevo conocimiento sobre los mismos.»* (Barallobres *et al.*, 2000 *apud* Itzcovich, 2005:13)

La idea de pensar en un alumno productor de conocimiento no es sencilla. La posición que el docente asume es la de proponer actividades que lo desafíen y lo comprometan a través de sus producciones. Esto puede lograrse por varios caminos. Por ejemplo, presentar problemas donde los conocimientos que los resuelvan sean nuevos, y entonces la actividad desafía al alumno para aprender algo nuevo. O bien puede el alumno ya conocer o identificar algunos elementos puestos en juego en el problema. A su vez, la situación le exige construir algo nuevo a partir de las relaciones que ya conoce. La necesidad de la justificación estará atravesando las propuestas planteadas. En otras palabras, el alumno necesitará responder: ¿por qué hago lo que hago?, ¿cómo sé que eso está bien?, ¿será siempre cierto?, etcétera.

Ahora bien, obsérvese que el último punto de las condiciones, detalladas en Itzcovich (2005), que deben cumplir los problemas a usar en geometría es un ítem esencial: la **validación** de la respuesta. Con esto se intenta establecer las condiciones de verdad o no de lo que se produzca. Sin embargo apela a que tanto los dibujos que se usen, las visualizaciones que se produzcan, son soportes para pensar las propiedades de las figuras en juego. Por eso, el autor declara que esas razones no se dan en un plano empírico, a nivel sensorial, sino que se apoyan en las propiedades conocidas de los objetos para construir otras razones a nivel intelectual.

Es necesario aclarar que en el ámbito de la enseñanza en que nos manejamos, las pruebas llamadas pragmáticas o empíricas (Balacheff, 1987) son soporte para comenzar a construir otras pruebas llamadas intelectuales. Algunos de los factores que es necesario considerar son, por un lado, la edad de los alumnos, y por otro, las condiciones de los objetos con los que trabaja la matemática[1].

Sadovsky (2015) plantea que para que una explicación tenga validez debe tener *«tres componentes –el carácter necesario, universal y anticipatorio–»*.

¿Qué significan esas tres características?

Cuando ofrecemos razones matemáticas, estas deben ser de carácter *universal*, pues bajo ciertas condiciones deben valer siempre. Serán *anticipatorias* porque puedo saber "antes" lo que va a suceder a partir de esas razones ofrecidas, y *necesarias* porque la conclusión se desprende de la o las premisas. Por ejemplo, la proposición *"si en un cuadrilátero, las dos diagonales se cortan en sus respectivos puntos medios, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo"*. Es *universal* porque vale siempre. Es *necesaria* porque si el cuadrilátero cumple las condiciones de que sus diagonales se corten en sus puntos medios (premisa), la conclusión siempre es verdadera (es un paralelogramo). Es *anticipatoria* porque *a priori* se puede saber que se trata de un paralelogramo si se verifican las condiciones ofrecidas.

Por otro lado, las distintas pruebas que producen los estudiantes y las que se produjeron y se producen históricamente son muy diversas. Desde el punto de vista de la actividad matemática, Balacheff (1987) identifica dos tipos de pruebas: *Pruebas pragmáticas* y *Pruebas intelectuales*.

Las **pruebas pragmáticas** se basan en propiedades usadas implícitamente y comprobadas en la acción. Los conocimientos funcionan como conocimientos prácticos. Se expresan en un lenguaje familiar, la acción explicitada por este lenguaje lleva la marca del tiempo de quien actúa y de su contexto de acción.

Ejemplos de producciones de pruebas pragmáticas podrían ser que un alumno justifique la verdad de un enunciado a través de verificar con algunos ejemplos. La prueba está ligada a la acción y expresa su respuesta con relación a su propia experiencia.

Un caso un poco "más avanzado" de prueba pragmática podría ser que un alumno hablase de un ejemplo genérico, "pasa siempre...". Si bien el análisis es sobre un objeto particular, la formulación que da (lenguaje usado) es más general, "siempre", pero aún es personalizada. Este tipo de prueba suele llamarse "ejemplo genérico"; Chemello y Crippa (2011) expresan que podría considerarse como un tipo intermedio de prueba entre las pragmáticas y las intelectuales.

[1] Los objetos de estudio de la matemática son ideales.

Usar **pruebas intelectuales** exige un cambio de posición respecto a las pruebas pragmáticas, la acción se vuelve objeto de reflexión. Los conocimientos son objetos de reflexión. El lenguaje pasa a ser funcional, despersonalizado, descontextualizado y destemporalizado.

En el trabajo en el aula, en una misma clase pueden coexistir diferentes tipos de pruebas, y aun un mismo alumno a veces puede ir de una a otra según el problema planteado.

A partir de las consideraciones anteriores aparece una variable nueva a tener en cuenta en el aula: *«el trabajo con las reglas del debate matemático como objeto de enseñanza»* (*ibid*.).

Según estas autoras, algunas de esas reglas a considerar son:

a) Un enunciado matemático puede ser verdadero o falso (Regla del tercero excluido).
b) Un contraejemplo es suficiente para validar la falsedad de un enunciado.
c) En matemática no son suficientes algunos ejemplos que verifican un enunciado para probar que es verdadero.
d) En matemática no es suficiente una constatación sobre un dibujo para probar que un enunciado de geometría es verdadero.

Estas reglas son las que vamos a intentar poner en juego en el trabajo con las actividades que siguen para centrarnos en la construcción de algunas de ellas, con el fin de que los alumnos de quinto y sexto construyan, a partir de la identificación de prismas y pirámides usando distintas representaciones, las propiedades que los caracterizan en cuanto a:

- relación entre desarrollos y esqueletos
- caras (forma, posición: paralelismo, perpendicularidad)
- aristas (longitud y número)
- vértices (número, cantidad de aristas que concurren por vértices)
- relación entre listas de propiedades (legajos) y representación sólida
- diferencia entre características mínimas de una figura (definición) y lista de características en general.

Recorrido de las actividades

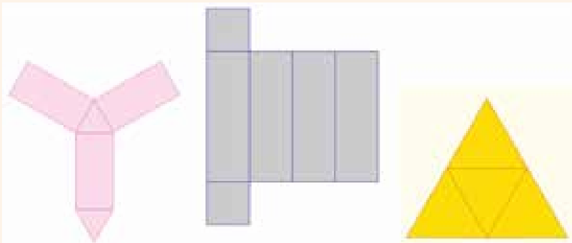
A continuación presentamos tres actividades que tienen como hilo conductor el trabajo con la validación en matemática y que, a su vez, van recorriendo distintos contenidos matemáticos referidos al programa escolar con figuras geométricas del espacio.

Actividad 1

El objetivo de esta actividad es establecer relaciones matemáticas a partir de dos representaciones distintas de prismas y pirámides. Estas representaciones son los desarrollos y los esqueletos[2].

Consigna

a) Elaborar un pedido escrito de aristas y vértices para armar el esqueleto de las siguientes figuras. No puede sobrar ni faltar material.



b) Guillermo dice que no todas las aristas que están dibujadas en los desarrollos son las que hay que pedir. ¿Podría tener razón Guillermo? Explica.
c) ¿Qué sucede con el pedido de los vértices y la cantidad de vértices que se "ven" en el desarrollo?

Esta actividad permite vincular dos tipos de representaciones: desarrollos y esqueletos; en este caso, de pirámide y prismas rectos.

¿Por qué se eligió partir de una representación plana (desarrollos) y no de los sólidos para hacer el pedido? Mientras que en el caso de los sólidos alcanza con contar aristas y vértices, puesto que se corresponden con la cantidad de varillas y bolitas a pedir, partir de desarrollos implica otra lectura de la representación. Es necesario establecer una relación entre lo que veo en el plano y lo que sé de la representación del espacio de esa figura.

[2] Llamamos esqueleto a una representación de poliedros, donde los elementos que se evidencian son las aristas y los vértices.

En particular, la elección de estos desarrollos pretende centrar la atención en las relaciones a establecerse entre los elementos del poliedro: aristas y vértices, y no solamente contar esos elementos.

La condición en la consigna de que en el pedido el material sea justo, obliga al alumno a realizar un proceso anticipatorio, independientemente del acierto o del error del pedido.

Algunos posibles pedidos que pueden realizar:

- Contar la cantidad de segmentos y puntos que se pueden ver en los desarrollos, y pedir esa cantidad. Para el prisma de base rectangular: diecinueve varillas y catorce bolitas; para el tetraedro: nueve varillas y seis bolitas; para el prisma de base triangular: catorce varillas y diez bolitas.
- Pedir la misma cantidad, pero considerando las distintas longitudes de las aristas y/o la igualdad entre las mismas. Por ejemplo, para el prisma de base triangular: ocho varillas cortas iguales y seis varillas largas iguales.
- Pedir la cantidad correcta, considerando o no las longitudes de las aristas.

Al producir los pedidos por escrito se ponen en juego conocimientos en relación a características de cada una de estas figuras en particular:

- De las aristas: longitud y número.
- De los vértices: número y cantidad de aristas que concurren por vértice.

Para saber si el pedido realizado es el adecuado o no, necesitarán validarlo. Sobre el desarrollo pueden superponer lo pedido, ahí tendrán que tener en cuenta que las representaciones son diferentes y que lo que se "ve" en el desarrollo no es lo que se "ve" en el esqueleto. Las partes b) y c) de la actividad apuntan a ello. Una opción diferente de validación sería armar la figura del espacio con lo pedido.

Otras formas de validación podrían ser recortar y armar los cuerpos, y comparar con el pedido, realizar una figura de análisis (dibujo en perspectiva), y contar aristas y vértices en esa representación, en todos los casos comprueban en la acción aquello que anticiparon. Estaríamos frente a lo que hemos presentado como pruebas pragmáticas.

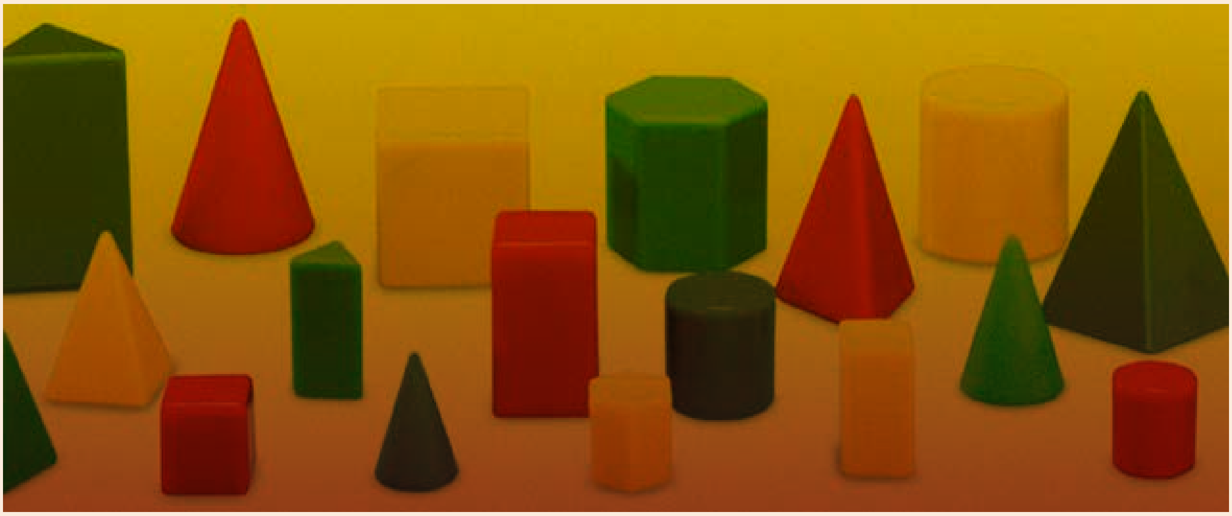
Desprendidos de la acción, podrían reconocer e identificar la figura a partir de su desarrollo y establecer relaciones con lo exigido en la actividad para justificar ese pedido. Por ejemplo, "necesito tres aristas iguales largas porque es un prisma de base triangular y las aristas de las caras laterales son tres iguales", "las tres aristas laterales concurren a dos vértices, uno por cada base", etcétera.

Las partes b) y c) de la actividad apuntan a comprender el tipo de información que nos brindan los desarrollos como representaciones de figuras del espacio, y establecer algunas generalizaciones. El carácter de esa generalización irá ganando "estatus matemático" a medida que se aborde esta representación desde distintos puntos de vista. Es importante promover un tipo "rústico" de generalización y enunciación, porque esto hace a la actividad matemática. Mejorar esa primera fundamentación es lo que hará avanzar en el acercamiento al estudio de las propiedades de las figuras en juego.

Es así que un alumno que explica por qué Guillermo tiene razón en que no hay que pedir la misma cantidad de aristas que las que están dibujadas, podría enunciar: *"Porque al armar el desarrollo, algunas aristas sirven para otras, ocupan el mismo lugar que otras aristas que se ven separadas en el dibujo"*. De este modo, en próximas situaciones se podrá usar el conocimiento generado. No es objeto de este artículo, pero es el docente quien deberá generar aquellas próximas situaciones que permitan o bien enriquecer esas generalizaciones, presentar situaciones con contraejemplos que posibiliten encontrar los límites de esa generalización, o bien producir otras nuevas.

Consideremos otro caso de posible justificación: *"Yo me imagino que lo armo"*. Acá no sería una reflexión sobre la acción, sino una reflexión sobre la representación de la acción; por lo tanto podría ser una de las pruebas en transición que plantean Chemello y Crippa (2011).

A modo construcción de conocimiento provisorio para esta actividad podríamos pensar en enunciados de generalización del tipo: *"En los desarrollos nos tenemos que fijar en… porque…"*.



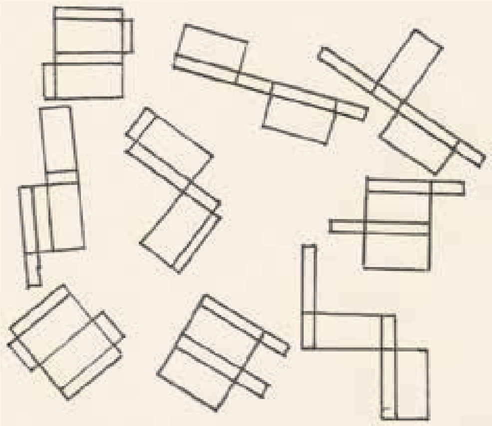
Actividad 2

El objetivo de esta actividad es establecer las características de figuras del espacio en un mismo tipo de representación. En este caso, en el desarrollo de un prisma recto de base rectangular (no cuadrado), atendiendo a las características de las caras laterales y de las caras que funcionan como bases.

Esta actividad permite poner en juego conocimientos ya construidos por los alumnos en relación a bases y caras laterales de prismas. El prisma seleccionado es un caso particular de prisma, ya que en los paralelepípedos, cualquier par de caras paralelas son bases.

Consigna

a) ¿Cuáles de los siguientes desarrollos representan prismas?
b) ¿Cuántos prismas distintos se podrán formar? ¿Por qué?



Este modelo de actividades en las que se solicita identificar qué desarrollos son posibles de armar para construir una figura, apunta generalmente a centrar la atención en la cantidad de caras del cuerpo, en la posición de unas con respecto a otras. En ese sentido comienza a estar en juego la idea de paralelismo y perpendicularidad entre las caras, y entre las aristas y las caras.

La parte a) pone en juego estas cuestiones, ya que no todos los desarrollos son posibles de armar; en uno de ellos se superponen caras, y en otro hay dos caras paralelas que están representadas en forma contigua.

Si se trabaja con estas mismas representaciones, ¿cómo avanzar hacia la construcción de otras relaciones?

Una de las relaciones que se puede trabajar es la de base y cara lateral. La presentación de los desarrollos de prismas, que generalmente se aborda en la escuela, es la que considera la idea de que las bases son las que están enfrentadas a ambos lados de las caras laterales. Los desarrollos seleccionados para este prisma pretenden romper con esta idea.

Otro elemento que se ha tenido en cuenta para esta actividad es que el prisma que se representa, habilita a que cualquier par de caras paralelas pueden funcionar como bases.

¿Qué podrían decir los alumnos?

Si analizamos la actividad y nos centramos en la validación, esta se podría producir inicialmente con el armado de cada desarrollo, y ahí descartar. En este caso estaríamos frente a un tipo de prueba empírica.

Por otro lado, algunos alumnos se podrían basar en propiedades arribando a algún tipo de prueba intelectual. A modo de ejemplo:

- *"Las bases no pueden estar del mismo lado"*, refiriéndose a los semiplanos[3] respecto a las caras laterales en el desarrollo. Acá, sin expresarlo, los alumnos estarían pensando en la relación de los semiespacios respecto a las caras laterales a partir de imaginarse la figura "armada".
- *"Las caras iguales no pueden estar pegadas"*, como sinónimo de contiguas; es decir que comparten una arista. Esto se debe al tipo de prismas que plantea la situación.
- *"Las caras paralelas no pueden estar pegadas"*; por lo tanto, las que son bases no pueden estar juntas.

En resumen, los conocimientos en juego que potencialmente se necesitarían usar refieren a:

- Diferenciar "función" de las caras: cuáles serán laterales o bases.
- Paralelismo de las caras.
- Perpendicularidad de las caras.
- Semiespacios, semiplanos (relaciones entre esas ideas).
- Igualdad de caras por el tipo de prisma presentado.

Estas propiedades en relación al prisma recto de base rectangular son las que ayudan a poner por escrito o en palabras, posibles validaciones de lo hecho. La puesta en común podría ser un buen momento para que el docente, a medida que los alumnos presenten sus argumentaciones, en un lenguaje coloquial, pueda incorporar algunas ideas matemáticas en función de las relaciones que pongan en juego.

Actividad 3

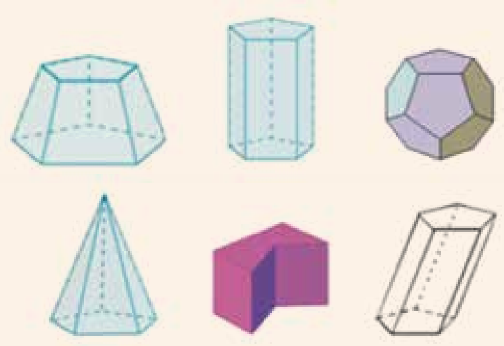
En esta actividad, el objetivo es diferenciar listas de características o propiedades de una posible definición.

La situación va a exigir elegir y pensar dentro de una selección de figuras cuáles son las características mínimas de cada una para poder seleccionar la pensada por Ema.

De igual modo habrá una correspondencia biunívoca entre la lista y las figuras a seleccionar. La actividad exige que la lista se depure, o se agreguen condiciones para que la figura que determine la lista sea única. De esta manera pretendemos acercarnos a que los alumnos produzcan posibles definiciones de algunas figuras a través de ofrecer una lista mínima de características.

Consigna

a) Ema quiso elegir una de estas figuras y elaboró una lista de características para que Nicole adivine.



Lista que hizo Ema:

- 7 caras
- 15 aristas
- 10 vértices
- Tiene 2 bases paralelas
- Dos de sus caras son pentágonos regulares
- Las caras laterales son paralelogramos

Nicole descarta las que no le sirven. ¿Cuáles descartó? ¿Por qué descartó cada una de ellas?

b) Agrega características para que la lista sirva solamente para una de las figuras que pudo haber elegido Ema.

c) ¿Cuál es la menor cantidad de pistas posibles que puedes dar para que se sepa que es esa figura?

---

[3] Acá hacemos "abuso" de lenguaje al considerar semiplanos con respecto a "las caras laterales" y no a una recta.

Los nombres de las figuras presentadas son:

- tronco de pirámide de base pentágono regular
- prisma recto de base pentágono regular
- dodecaedro
- pirámide recta de base pentágono regular
- prisma recto no convexo de base pentágono no regular
- prisma oblicuo de base pentágono regular.

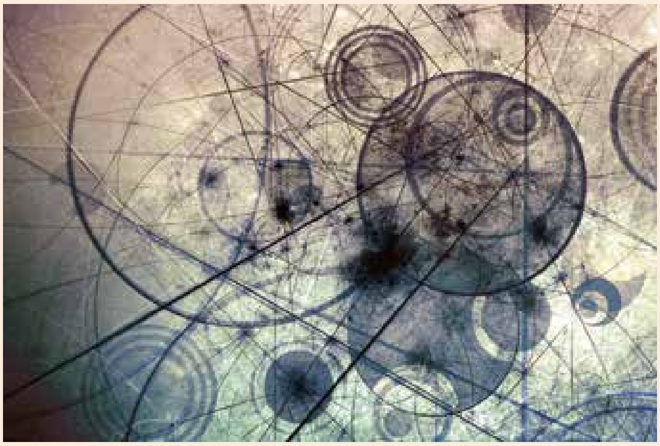
Esta información es del manejo del docente, ya que la forma de nombrar a estas figuras puede inducir a los alumnos a tomar ciertas decisiones sin "leer" la representación de los "sólidos". El asunto de "leer" las representaciones sólidas es relevante, porque ofrecen informaciones y propiedades que caracterizan a las figuras en juego. El nombre de la figura identifica y concentra todas las propiedades de cada figura. Conocer solamente el nombre no hace a la actividad geométrica que queremos realizar, sí es importante conocer las características de las figuras.

En este sentido, analizar la consigna nos permite evidenciar la importancia de definir por lo que es, y por lo que no es, una figura.

¿Qué elementos podrían tener en cuenta los alumnos?

A continuación enumeramos una posible lista de formas de selección de las distintas figuras ofrecidas.

- Pirámide trunca se descarta porque las caras laterales no son paralelogramos, sino trapecios, porque las caras paralelas no son iguales. Se podría variar una de las pistas y que sea descartada por la base. Por ejemplo, en lugar de caras laterales paralelogramos, ofreceríamos caras laterales cuadriláteros, y en lugar de dos bases paralelas, dos bases paralelas e iguales.
- Pirámide de base pentagonal se descarta porque en la lista dice tener dos bases o porque los polígonos de las caras laterales no son paralelogramos.
- Dodecaedro se descarta por la cantidad de caras, aristas, vértices, caras laterales paralelogramos, bases, etcétera.
- Prisma no convexo de base pentagonal se descarta porque sus bases, si bien son pentágonos, no son regulares.



En la parte b), luego de descartadas las figuras en a), quedan dos prismas de base pentagonal, uno oblicuo y otro recto. Las pistas que pueden dar para distinguir a un prisma del otro podrían ser, por ejemplo:

- longitud de arista que coincide o no con la altura,
- caras laterales que son o no perpendiculares a las bases,
- caras laterales que son o no rectángulos.

Con respecto a la parte c), esta apunta a quedarse con características esenciales que permiten definir a estas figuras. Es así que esta actividad se vincula con dos formas de representación. Por un lado, los cuerpos sólidos con sus nombres; y por otro, la lista de características (legajos).

En este momento del análisis estamos introduciendo otra manera de considerar la representación de las figuras ofrecidas en la consigna. Esta representación refiere a los legajos o listas de características o propiedades de una figura.

Al igual que en las actividades anteriores, las soluciones pueden ser validadas a través de construcción de pruebas empíricas yendo a la consideración de la figura ofrecida en su representación sólida, y sobre ella analizar las propiedades que debe cumplir.

Otro tipo de prueba que se puede acercar más a un tipo de prueba intelectual es reconocer las propiedades de las figuras en cuestión y ponerlas en juego para la elección de la figura elegida a partir de la lista elegida.

Por ejemplo, un alumno podría decir: *"Descarto la pirámide porque las caras laterales son siempre triángulos"*.

Hasta ahora

A través de las tres actividades presentadas fuimos recorriendo aspectos distintos de las figuras del espacio, estableciendo relaciones con sus propiedades. Se buscó, mediante la exigencia de la actividad, que los alumnos validaran sus acciones, con el fin de intentar una actitud autónoma e independiente por parte de ellos. A su vez, promover una relación distinta con la matemática y poder expresar: *"Yo hice esto... porque..."*. También estuvieron en juego diferentes maneras de representar un mismo objeto matemático; en este caso, de algunas figuras del espacio. Esto habilita a que el alumno considere las propiedades que cada una de esas representaciones muestra del objeto matemático que está en estudio. Estas formas diferentes de representación y sus relaciones abonan el trabajo en relación a la producción de conocimiento matemático.

Por otro lado, se abren una serie de preguntas que no hemos desarrollado en este artículo, pero no menos importantes. Podemos dejar planteadas estas interrogantes para próximos acercamientos. Algunas de ellas son: ¿qué papel juega la visualización en la construcción de estos conceptos?, ¿cómo desarrollarla?, ¿no considerarla obstaculiza la construcción de estos conocimientos geométricos?, ¿cómo?, ¿hay decisiones didácticas que obstaculicen este desarrollo?

Bibliografía

BALACHEFF, Nicolás (1987): *Procesos de prueba y situaciones de validación*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

CHEMELLO, Graciela; CRIPPA, Ana Lía (2011): "Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible?" en A. L. Díaz (coord.): *Enseñar Matemáticas en la escuela media*. Buenos Aires: Ed. Biblos.

ITZCOVICH, Horacio (2005): *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

ITZCOVICH, Horacio (coord.) (2009): *La Matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor. Colección: Carrera Docente. Serie: El abecé de...

SADOVSKY, Patricia (2015): "Otra matemática es posible" en *La educación en debate*, Nº 29 (Abril) (Suplemento, UNIPE, Buenos Aires), p. I. *Le monde diplomatique*. En línea: http://editorial.unipe.edu.ar/wp-content/uploads/2015/04/Unipe-29.pdf