Dos viejas conocidas: la mediatriz y la bisectriz

Matías Guichón | Profesor de Matemática. Docente en Formación de Profesores (CFE). Formador de Matemática en el Instituto de Formación en Servicio (CEIP).
Fabián Luaces | Profesor de Matemática. Docente en Formación de Profesores (CFE). Formador del Equipo de Matemática de PAEPU.

Introducción

En un artículo anterior señalábamos la presencia de las construcciones geométricas en la escuela y el lugar de las mismas en la construcción de los conocimientos geométricos. Allí destacábamos que *«…adquieren un rol fundamental en la elaboración de una red de conceptos geométricos»* (Duarte, Guichón y Luaces; 2014:28).

Esta vez centraremos la mirada en diferentes construcciones de dos figuras conocidas: la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo. Justificaremos las clásicas construcciones con regla y compás reconociendo en ellas las propiedades de las figuras, y a partir de estas buscaremos construcciones alternativas. Analizaremos también vínculos entre los procedimientos de construcción y la elaboración de nuevos conocimientos sobre las figuras.

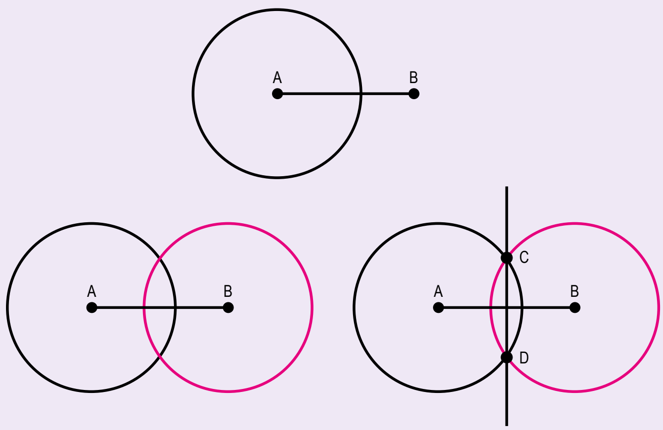
Te invitamos a que nos acompañes durante la lectura del artículo con lápiz, papel, regla, escuadra y compás a mano para que completes algunas de las construcciones que proponemos, elabores figuras de análisis cuando lo creas necesario y pongas a prueba las afirmaciones que consideres dudosas.

Comencemos entonces por algunas construcciones de la mediatriz de un segmento.

Un clásico

Utilizando solamente regla y compás para construir la mediatriz de un segmento, el procedimiento de construcción más habitual quizá sea este:

- Apoyando el compás en uno de los extremos del segmento, elegimos el A, trazamos una circunferencia[1] con un radio mayor a la mitad de la longitud del segmento.
- Repetimos el proceso con la "misma abertura" del compás, pero apoyándolo en el otro extremo del segmento.
- Ambas circunferencias tienen dos puntos en común, C y D, los que determinan la mediatriz.



[1] En nuestras clases no necesariamente aparecen las circunferencias. Estas son sustituidas por los tradicionales "arquitos" que pueden ocultar la equidistancia de los puntos de la circunferencia con el centro de la misma. Es importante para nuestro trabajo que aunque los "arquitos" sustituyan a las circunferencias, el vínculo se haga explícito: el "arquito" representa algunos puntos particulares de la circunferencia.

Ahora, ¿cuáles son las razones matemáticas que nos permiten asegurar que la recta CD es efectivamente la mediatriz del segmento? Vamos a dar dos justificaciones diferentes.

Primera justificación

Fijando la atención en los segmentos AC, CB, BD y DA podemos sospechar que son iguales, pero ¿lo son? La construcción nos asegura que sí, ya que C y D están a la misma distancia de A por pertenecer a la primera circunferencia, C y D están a la misma distancia de B por pertenecer a la segunda circunferencia, y nos aseguramos de que las dos veces la abertura del compás fuera la misma, por lo que los cuatro segmentos son iguales. Podemos entonces dejar de considerarlos como puntos: ¡son los vértices de un rombo! Con esto, los segmentos AB y CD son sus diagonales, y como sabemos que las diagonales de un rombo son perpendiculares y se cortan en su punto medio, la recta CD es perpendicular al segmento AB, lo corta en su punto medio, por lo que es su mediatriz. Esta argumentación focaliza nuestra conceptualización de la mediatriz como **recta perpendicular al segmento[2] por el punto medio de este**.

Esto último justifica una construcción que se puede hacer utilizando regla y escuadra: se ubica el punto medio del segmento midiendo; "apoyando" en el segmento uno de los lados del ángulo recto de la escuadra se la "desliza" hasta que el vértice en el que se forma el ángulo recto coincida con el punto medio, para desde allí trazar la perpendicular usando el otro lado del ángulo recto. De esta forma obtenemos otra construcción de la mediatriz de un segmento basada en la misma idea: la mediatriz como recta perpendicular al segmento por su punto medio.

Segunda justificación

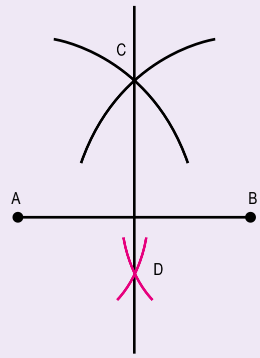
Admitiendo que la mediatriz de un segmento es única (algo que parece una obviedad, pero en otros contextos es importante poder justificarlo) y recordando que dos puntos determinan una recta, nos queda "solamente" argumentar por qué los puntos C y D pertenecen a la mediatriz (y como tales la determinan). Como apuntamos en la justificación anterior, los dos primeros pasos de la construcción aseguran que los puntos C y D se encuentran a la misma distancia de A y B, ya que la abertura del compás en los dos casos es la misma. Es por ello que pertenecen a la mediatriz del segmento AB, y la recta que pasa por ellos es dicha mediatriz. En este caso conceptualizamos la mediatriz como la **recta en la que sus puntos están a la misma distancia de los extremos del segmento**.

> **Una nota antes de continuar**
> Queremos resaltar que un mismo procedimiento lo justificamos de diferentes maneras, poniendo en juego otros conocimientos y conceptualizando la mediatriz de dos formas distintas. Y de una misma conceptualización se pueden elaborar o justificar procedimientos diferentes. (Esto se extiende a muchas situaciones de clase, en las que procedimientos iguales están sustentados en conocimientos diferentes y mismos conocimientos originan procedimientos diferentes).

Volvamos a nuestra segunda justificación...

A partir de ella podemos observar que para determinar la mediatriz de un segmento alcanza con **encontrar dos puntos que estén a la misma distancia de los extremos de este**. Basándonos en esta idea es posible modificar el procedimiento original y obtener otras formas de construir la mediatriz de un segmento. Vayamos a una posible:

- Fijamos una abertura del compás mayor a la mitad del segmento y trazamos dos arcos de circunferencia centrando uno en un extremo del segmento y el otro arco en el otro extremo. Nos aseguramos que esos arcos se corten. Este es un punto de la mediatriz.
- Repetimos el paso anterior pero con una abertura diferente del compás. Así encontramos otro punto de la mediatriz. La recta que pasa por ellos es la mediatriz del segmento AB.



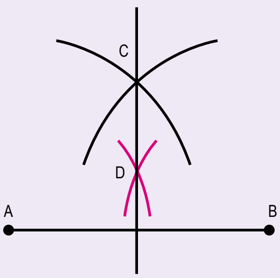
[2] De una forma más formal podríamos decir "perpendicular a la recta que contiene al segmento".

Podemos fijar nuestra atención en el polígono ACBD. En este caso es claro que no es un rombo, pero los lados AC y CB son iguales así como lo son el BD y el DA. Este polígono nos recuerda a una cometa, ¿a ustedes no? De la propia construcción es evidente que tiene dos pares de lados iguales, pero ¿qué propiedades tiene? Dos se deducen del hecho de que la recta CD es mediatriz del segmento AB:

- Las diagonales son perpendiculares, porque una está incluida en la mediatriz de la otra.
- La diagonal incluida en la mediatriz corta a la otra en su punto medio.

Por término general, cada procedimiento pone en juego una serie particular de conocimientos que, a su vez, se pueden conectar con otros. En este caso, lo que ya sabemos sobre la mediatriz lo transformamos en información nueva con relación a una figura particular: la "cometa".

Volviendo al procedimiento anterior, nada impide que los arcos de circunferencia los tracemos "del mismo lado" del segmento. En ese caso, la construcción puede verse así:



¿Qué ocurre con el plegado?

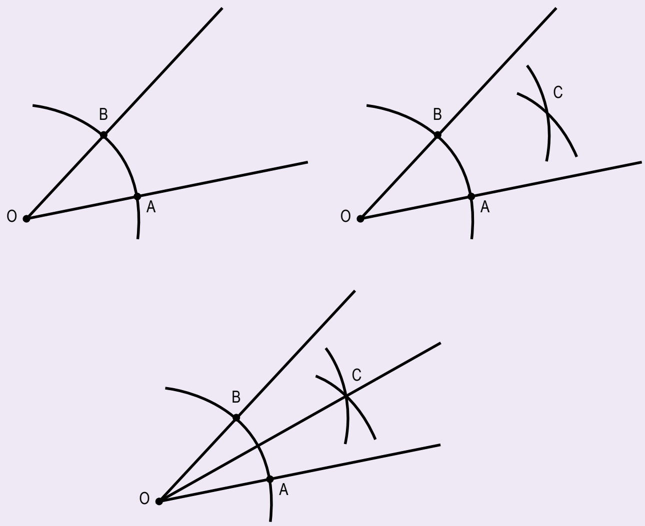
Si conocemos el segmento, ¿cómo encontramos la mediatriz? Podemos plegar el papel hasta que un extremo del segmento coincida con el otro. El doblez que generamos representa una recta que tiene las siguientes propiedades: con el segmento original determina cuatro ángulos iguales (que sumados dan un ángulo completo, con lo que cada uno es recto) así como lo divide en dos partes iguales (el doblez determina sobre el segmento su punto medio). Lo anterior justifica que esa recta es perpendicular al segmento por su punto medio, ¡es entonces la mediatriz del segmento! En este caso vemos como la mediatriz es eje de simetría del segmento... lo que nos lleva a otra conceptualización: la mediatriz de un segmento es el eje de simetría que intercambia los extremos del segmento[3].

Analicemos ahora algunas construcciones de la bisectriz de un ángulo.

Otro clásico

Una clásica construcción con regla y compás de la bisectriz de un ángulo, con gran presencia en la escuela, es la siguiente:

- Apoyamos el compás en el punto O y con la "misma abertura" ubicamos dos puntos A y B sobre los respectivos lados del ángulo.
- Apoyando el compás en dichos puntos y "manteniendo la abertura" trazamos dos arcos que se cortan en el punto C.
- La semirrecta OC es la bisectriz del ángulo.

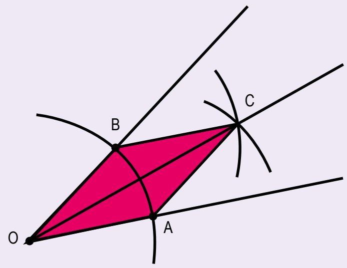


¿Qué nos asegura que la semirrecta OC es la bisectriz del ángulo?

Analicemos la figura obtenida para justificar que el cuadrilátero OACB es un rombo. En el primer paso trazamos los puntos A y B utilizando el compás con "la misma abertura", lo que nos asegura que los segmentos OA y OB son iguales. De igual forma, en el segundo paso trazamos "manteniendo la abertura" del compás. Esto asegura que los segmentos AC y BC son iguales, pero también asegura que estos son iguales a los segmentos OA y OB. ¿Por qué? Entonces el cuadrilátero OACB tiene sus cuatro lados iguales, por lo que es un rombo.

---

[3] En el caso de la mediatriz de un segmento como eje de simetría del mismo, el extremo A se transforma en el B, el B en el A, el punto medio queda igual, fijo, ya que pertenece al eje. Una recta que contiene al segmento también es eje de simetría del mismo pero, en ese caso, todos los puntos son fijos.

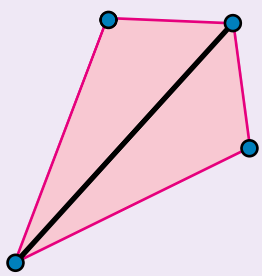


La semirrecta OC (más precisamente el segmento OC) es diagonal del rombo y sabemos que *“las diagonales de un rombo[4] son bisectrices de sus ángulos”*. En este caso, la diagonal OC es bisectriz de los ángulos AOB y ACB del rombo y, tal como queríamos, la semirrecta OC es la bisectriz del ángulo original AOB.

De esta forma encontramos que esta construcción efectivamente permite hallar la bisectriz de un ángulo gracias a una propiedad de las diagonales del rombo.

Como vimos anteriormente, las diagonales de la “cometa” comparten propiedades con las diagonales del rombo. Nos preguntamos entonces si las diagonales son bisectrices de sus ángulos también. Te invitamos a hacer una figura y analizarla antes de seguir adelante.

Como habrás observado, solo una de las diagonales de la “cometa” es bisectriz de un par de ángulos opuestos; es la diagonal que une los vértices en los que concurren los lados iguales.



Es decir que en nuestra construcción es suficiente con que sean iguales los lados OA y OB, y los lados AC y BC. Esto nos permite modificar algunas condiciones en los pasos de la construcción: en el segundo paso no es necesario “mantener la abertura” del compás, sino que podemos utilizar diferentes “aberturas” en los dos primeros pasos de la construcción. De esta forma obtenemos otra construcción de la bisectriz.

Otra nota antes de continuar

En las construcciones comentadas anteriormente se trata de **ubicar solo un punto de la bisectriz** al que llamamos C. ¿Por qué solo buscamos uno? Como ya sabemos *“la bisectriz de un ángulo pasa por el vértice del mismo”*, por lo que alcanza con encontrar otro punto de ella para poder trazar la semirrecta. En algunas de las construcciones siguientes también se trata de determinar solo un punto de la bisectriz.

Ahora sí, volvamos a las construcciones...

Hasta el momento hemos partido de las construcciones en busca de las propiedades que las justifican. Vayamos ahora en sentido contrario, partiendo de algunas propiedades de la bisectriz que nos permitan desarrollar construcciones de la misma. Tomaremos estas tres:

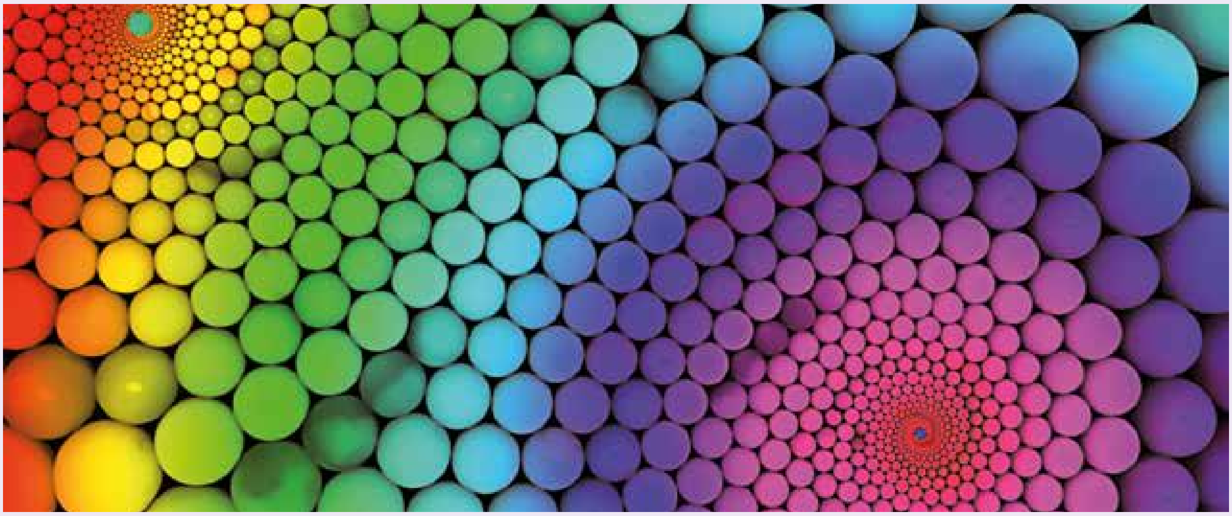
- *Propiedad 1*: la bisectriz de un ángulo divide al mismo en dos ángulos iguales.
- *Propiedad 2*: La bisectriz de un ángulo es eje de simetría[5] del mismo.
- *Propiedad 3*: Todos los puntos de la bisectriz de un ángulo están a igual distancia de ambos lados del mismo.

La primera propiedad es quizás la más conocida, y en ocasiones se define a la bisectriz de un ángulo en base a ella. Tratemos de ponerla en juego para construir la bisectriz de un ángulo que conocemos, lo que en nuestro caso se reduce a “dividir el ángulo en dos partes iguales”. Una herramienta útil para hacerlo es el semicírculo, que nos permite medir la amplitud del ángulo para luego obtener los ángulos “mitad” que estamos buscando. Esta es otra posible construcción de la bisectriz de un ángulo.

La segunda propiedad significa que al simetrizar el ángulo con respecto a la bisectriz se obtiene el mismo ángulo pero con los lados “intercambiados”. De esta forma estamos buscando la recta que simetriza un lado en el otro lado (y pasa por el vértice del ángulo). Una forma de poner en juego las simetrías es a partir de plegados: si conocemos el eje basta con plegar a partir de él para simetrizar una figura. En nuestro

[4] Esto es un abuso de lenguaje, ya que las diagonales son segmentos y las bisectrices son semirrectas.

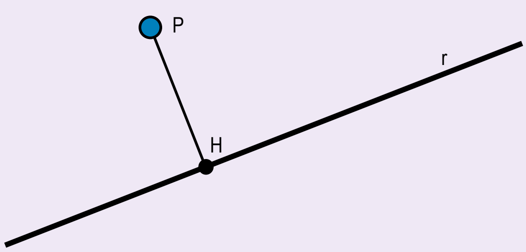
[5] De nuevo hacemos abuso de leguaje. El eje de simetría de una figura es una recta, mientras que la bisectriz de un ángulo es una semirrecta.



caso conocemos las figuras simétricas, los lados, y no conocemos el eje de simetría que es la bisectriz. Alcanza entonces con plegar la figura de forma que un lado del ángulo se superponga con el otro. El *doblez* en el papel representa la recta que contiene a la bisectriz.

La última de las propiedades que enunciamos es quizás la menos conocida, y establece que un punto cualquiera de la bisectriz está a la misma distancia de cada uno de los lados del ángulo. Como nuestra tarea de trazar la bisectriz del ángulo se reduce a encontrar un punto de ella diferente del vértice, entonces lo que estamos buscando es un punto que esté a igual distancia de los lados del ángulo.

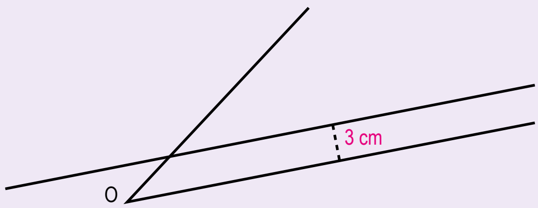
En primer lugar recordemos que la distancia de un punto a una recta (una semirrecta en este caso) se mide "de forma perpendicular a la misma". Es decir, si en la figura quisiéramos medir la distancia entre el punto P y la recta r debemos medir el segmento PH.



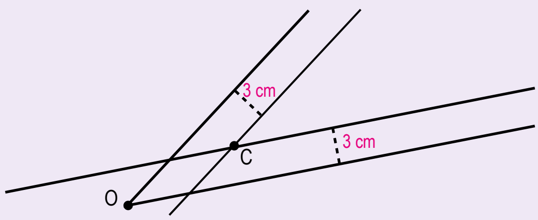
Como estamos buscando un punto "a igual distancia" de ambos lados, no nos interesa el valor de dicha distancia. Por esto es que podemos elegir a qué distancia de ambas semirrectas ubicar el punto de la bisectriz.

Supongamos que vamos a ubicar un punto C a 3 cm de ambas semirrectas. ¿Qué figura determinan todos los puntos que están a 3 cm de una recta? Estos puntos determinan un par de rectas paralelas, una a cada lado de la recta.

En nuestro caso hablamos de distancia a los lados del ángulo, así que trazaremos rectas paralelas a ellos. Comencemos con uno de los lados. Como solo nos interesan puntos que estén "en el interior del ángulo" nos alcanza con trazar solamente una de estas paralelas:



Esta recta de la figura está formada por "puntos que están a 3 cm de uno de los lados". De la misma forma podemos proceder para hallar la paralela al otro lado, que contenga los puntos a 3 cm de él:



El punto C en el que se cortan ambas rectas es el punto que buscamos, ya que está a 3 cm de cada uno de los lados: está a igual distancia de

ambos. Tenemos así que la bisectriz del ángulo es la semirrecta OC. Por lo tanto desarrollamos otra forma de construir la bisectriz de un ángulo.

Para terminar

La presencia de las construcciones geométricas en la escuela y la importancia de las mismas en la construcción de conocimientos geométricos en los niños, nos obligan a reflexionar al respecto. Esto implica buscar los conocimientos que hay detrás de ellas así como "inventar" nuevas a partir de estos. Estaremos entonces problematizando estos algoritmos de construcción con nuestros alumnos y profundizando en los conocimientos geométricos involucrados, así como construyendo nuevos sobre las mismas figuras, sobre otras y sobre los nexos que existen entre ellas.

Nota:
Matías Guichón: matiasguichon@gmail.com
Fabián Luaces: f_luaces@hotmail.com

Bibliografía

CURTI, María del Carmen; PAZOS, Liliana (2014): "A la hora de planificar, ¿por qué elaborar secuencias de enseñanza?" en *QUEHACER EDUCATIVO*, Nº 123 (Febrero), pp. 64-70. Edición Especial: "Saberes y quehaceres". Montevideo: FUM-TEP.

DUARTE, Alejandro; GUICHÓN, Matías; LUACES NORIA, Fabián (2014): "Decisiones docentes en torno a relaciones geométricas" en *QUEHACER EDUCATIVO*, Nº 128 (Diciembre), pp. 28-34. Montevideo: FUM-TEP.

ITZCOVICH, Horacio (2005): *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

PUIG ADAM, Pedro (1976): *Curso de Geometría Métrica*. *Tomo I*. *Fundamentos*. Madrid: Nuevas Gráficas.