

# Decisiones docentes en torno a relaciones geométricas

Alejandro Duarte | Matías Guichón | Profesores de Matemática. Docentes en Formación de Profesores (CFE).  
Formadores de Matemática en el Instituto de Formación en Servicio (CEIP).

Fabián Luaces Noriá | Profesor de Matemática. Docente en Formación de Profesores (CFE).  
Formador del Equipo de Matemática de PAEPU.

Las construcciones geométricas son actividades habituales en la escuela al trabajar contenidos de geometría. Algunas se han transformado en clásicas, el ejemplo paradigmático es el de la construcción de triángulos conociendo sus lados. Pero *¿qué lugar ocupan las construcciones en la enseñanza de la geometría?*

Iztcovich (2009) define *«El estudio de las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos»* como uno de los grandes objetivos de la enseñanza de la geometría en la escuela. Esto dista del reconocimiento visual de las propiedades o de saber sus nombres, implica disponer de ellas y utilizarlas para resolver problemas. El estudio de estas propiedades y características de las figuras debe ser abordado a lo largo de todo el ciclo cada vez con mayor profundidad y desde diferentes aproximaciones.

En este sentido, las construcciones adquieren un rol fundamental en la elaboración de una red de conceptos geométricos. A diferencia de las clásicas, entendidas como “ejercicios de aplicación”, las construcciones bajo algunas condiciones permiten explorar, conjeturar y validar las propiedades que son objeto de estudio en la escuela primaria. Las formas de hacer matemática cobran fuerza desde esta manera de

trabajar, recuperando su esencia particular, revalorizando *«la enseñanza del modo de pensamiento de la disciplina»* (Schwab, 1973).

De esta forma, las representaciones de las figuras no son “el fin” a alcanzar, sino el punto de partida para la construcción de conceptualizaciones acerca de los objetos geométricos, sus propiedades, las relaciones entre figuras, etcétera.

Como es de esperar, el solo hecho de realizar construcciones no es lo que permitirá conceptualizar los objetos geométricos a los alumnos. Para ello es necesaria la intervención docente desde la secuenciación del contenido, pasando por el diseño de la consigna, las condiciones de realización de la tarea, la discusión con los alumnos y el cierre de la actividad. En este artículo nos concentraremos, a través del análisis de ejemplos, en algunas de las decisiones que debemos tomar de forma explícita a la hora de diseñar este tipo de consignas. Atenderemos a cuáles son las consecuencias de esas decisiones en los saberes que se movilizan y, en particular, en la cantidad de soluciones del problema. Así esperamos que al finalizar el artículo hayamos transmitido esta preocupación al lector.

Las tareas de construcción obligan a los alumnos a analizar los datos que proporciona el problema, la relación que existe entre dichos datos, la relación entre los datos y la figura a determinar, y la posibilidad de la construcción. Este análisis y las discusiones que genere el docente, permitirán a los alumnos apropiarse de las figuras como objetos que cumplen determinadas características y propiedades superando lo meramente perceptivo.

¿Qué sucede con esas relaciones en las actividades que se trabajan habitualmente? «*No se proponen problemas para que los niños descubran las relaciones geométricas que existen en una figura o un sólido. Estas relaciones se presentan a menudo como conceptos ya acabados.*» (Ponce *apud* Falzetta, 2008)

La cita anterior nos obliga a centrar la mirada en las actividades que proponemos a los alumnos y, en particular, en algunas condiciones estrechamente vinculadas con el objetivo que se plantea trabajar: la selección o modificación del problema debe ser cuidadosamente analizada, a fin de asegurarnos que los alumnos pongan en juego los conocimientos que son objeto de enseñanza. De esta forma cobran importancia aquellos elementos de la situación, variables didácticas, que podemos modificar para provocar cambios en la estrategia de solución de modo que propicien la puesta en juego de las propiedades y las relaciones que son nuestro objetivo de enseñanza.

Al diseñar o modificar una actividad de construcción, modificaremos los valores de estas variables en función del objetivo, por lo que es importante tener en cuenta algunas relaciones como son «*la relación entre los datos y las propiedades y la relación entre los datos y cantidad de soluciones*» que menciona Itzcovich (2005), y la relación entre datos y posibilidad de la construcción.

El recorrido que elegimos parte de un ejemplo clásico de construcción, en el que identificaremos algunas variables didácticas y ensayaremos modificaciones del problema. Desde allí intentaremos “aterrizar” esas modificaciones.

Comencemos trabajando sobre ese problema:

***Construir un triángulo, conocidos sus tres lados.***

Este problema se resuelve intersecando un par de circunferencias centradas en los extremos de uno de los lados del triángulo. Este algoritmo de construcción ha sido tradicionalmente enseñado en la escuela y es utilizado muchas veces de forma mecánica. En este sentido, una vez que los alumnos conocen el algoritmo lo ejercitan construyendo triángulos con lados de diferentes medidas. En algunos casos, la clasificación del triángulo es una condición que se exige desde la consigna, por ejemplo: “*Construir un equilátero de lados de 4 centímetros*”. Resulta interesante pensar en los procedimientos de resolución que despliegan algunos alumnos. No es novedad que en ocasiones, estos utilizan la regla graduada para construir el triángulo forzándolo a “cerrarse” casi a ojo y colocando “la cruz” para finalizar la construcción. Esto nos obliga a preguntarnos si los alumnos realmente comprenden lo que están haciendo, cuando construyen un triángulo a partir de sus lados utilizando la regla y el compás.

Por eso es importante “volver” con actividades que exijan la aparición de la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos que están a una misma distancia de un punto fijo. En particular, asociado a ubicar un vértice de un triángulo partiendo de un lado<sup>2</sup>.

En el resto del artículo tomaremos esa relación como conocida.

Analicemos una posible variante al problema anterior:

***Reproducir un triángulo (grande) representado sobre el piso del patio, utilizando solamente una piola.***

Los datos de este problema son similares a los del anterior: los lados del triángulo que se pretende representar. Sin embargo, la representación del triángulo a reproducir y su tamaño implican que los alumnos se desplacen en el patio para poder cumplir la tarea. El “tamaño” del espacio –en este caso, el patio– excede el microespacio (cuaderno de clase) pasando al mesoespacio.

<sup>1</sup> Nos referimos a la “cruz” que forman los arcos de circunferencia, cuando el triángulo es construido utilizando el compás.

<sup>2</sup> El artículo de Curti y Pazos (2014) aporta sobre lo mencionado.

Otra diferencia con el problema anterior radica en el recurso a utilizar –en este caso, la piola–. El largo de la piola habilitará, o no, diferentes procedimientos para la representación. Fijemos la atención entonces en dicha variable didáctica: si el largo de la piola permite “rodear” el triángulo, los alumnos podrán trasladarlo en el sentido físico de la expresión. En otras palabras, tres alumnos podrán officiar de vértices, sostener la cuerda y desplazarse a otro lugar del patio, para representar allí el triángulo mientras sostienen la cuerda tirante. Ahora, ¿qué conocimiento ponen en juego estos alumnos? Dos triángulos cuyos tres lados “miden igual” son congruentes.

Podemos preguntarnos: *¿qué longitud debe tener la piola para representar el triángulo utilizando circunferencias?*

En primer lugar, si pretendemos transportar los lados del triángulo, la piola debe ser suficiente como para medir cada uno de los lados. Esto nos permite sacar una primera conclusión: la cuerda no puede ser menor que alguno de los lados. En otras palabras: la cuerda debe medir al menos como el mayor de los lados del triángulo. Esta primera conclusión nos da una *longitud mínima para la piola*, pero según discutíamos más arriba, la cuerda no puede ser tan larga como queramos. Entonces, ¿cómo podríamos resolver el problema si la cuerda es suficiente para “rodear” dos de los lados del triángulo? En este caso podríamos trasladar uno de los lados y, a partir de la representación del mismo, trasladar los lados restantes (como comentamos en el caso de que la piola rodee todo el triángulo). Obtenemos entonces una *longitud que la piola no puede alcanzar*: la suma de dos cualesquiera de los lados.

Resumiendo lo anterior: *para poner en juego la relación entre lados de un triángulo y circunferencia, la longitud de la piola deberá ser mayor o igual que el lado más largo del triángulo, y menor que la suma de dos cualesquiera de los lados.*

La discusión anterior nos permite “poner el ojo” en la relación que existe entre el instrumento y los conocimientos puestos en juego.

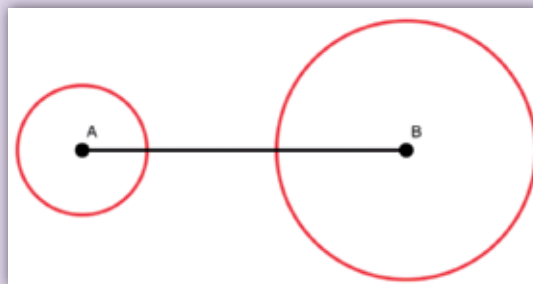
Una variable modificada con frecuencia es la medida de los lados. Si proponemos construir triángulos a partir de la medida de sus lados, aunque dichas medidas no sean siempre las mismas,

parece que el problema no cambia. Ahora, *¿qué conocimientos o procedimientos se modifican al variar las medidas de los lados?* Construyamos triángulos de lados 2, 3 y 4 centímetros; 10, 10 y 17 centímetros; 3, 3 y 3 centímetros. Estas modificaciones no “alteran” ni el procedimiento de resolución, ni la cantidad de soluciones. En estos casos, el algoritmo para la construcción de triángulos del problema original funciona sin más. Como puede anticiparse, es posible aplicar el mismo procedimiento para cualesquiera sean las medidas de los lados<sup>3</sup>, pero en algunos casos no es posible construir el triángulo. Nos preguntamos ahora, *¿qué medidas debemos dar a los lados del triángulo para que este no exista? ¿Qué medidas deben tener los lados para que el problema no tenga solución?*

Es conocido que para que un triángulo exista “la suma de dos cualesquiera de sus lados, debe ser mayor que el tercero”. Esto nos permite afirmar que no existen triángulos de lados de 1, 2 y 5 centímetros, ni de 1, 2 y 3 centímetros. En el primer caso, la suma de dos lados es menor que el tercero ( $1 + 2 < 5$ ) y en el otro caso, la suma de dos lados es igual al tercero ( $1 + 2 = 3$ ).

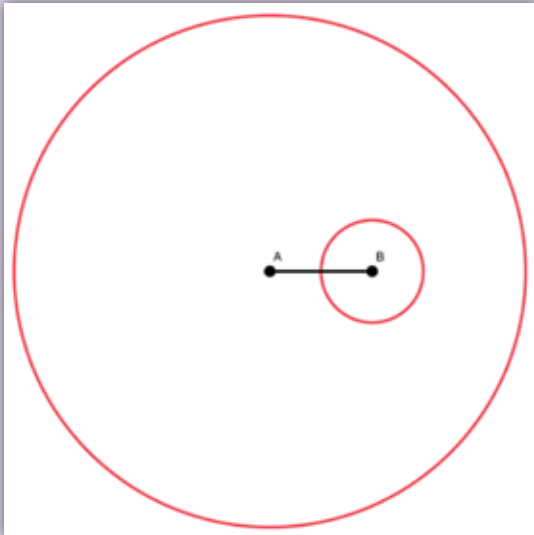
Vamos a detenernos un momento a pensar en la “traducción” de estas relaciones en términos de construcciones.

Comencemos por la construcción del “triángulo” de lados de 1, 2 y 5 centímetros. Si comenzamos construyendo el triángulo por su lado de 5 cm, tendremos que trazar dos circunferencias centradas en cada uno de los extremos del lado: una de radio 1 cm, y la otra de radio 2 cm. ¡Estas circunferencias no se cortan! Esto da cuenta de la no existencia de dicho triángulo (no existe punto alguno que cumpla las dos condiciones a la vez).



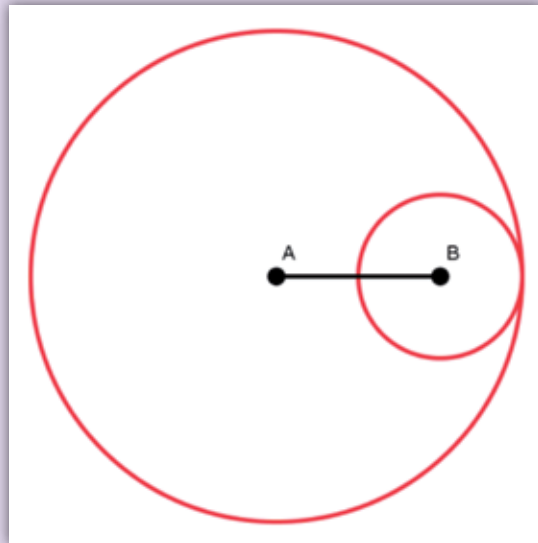
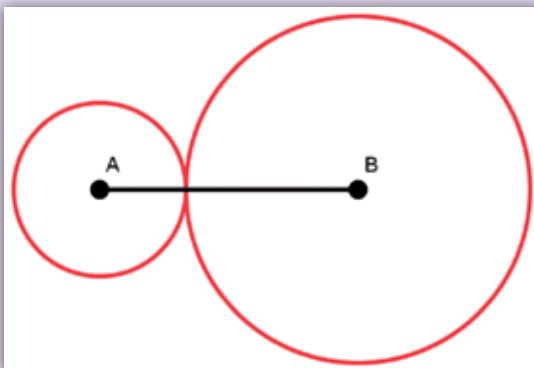
<sup>3</sup> Atendiendo a las limitaciones de los instrumentos, la apertura del compás.

Si comenzamos construyendo el triángulo por el lado de 2 cm, el procedimiento es el mismo que en el caso anterior, y la figura obtenida es la siguiente:



Comenzando por el lado de 1 cm se obtiene una figura similar a la anterior. Como puede observarse a partir de las figuras, la diferencia radica en la posición de las circunferencias: en el primer caso las circunferencias son exteriores, y en el segundo caso (y tercero) una circunferencia es interior a la otra.

En el caso de que la suma de dos lados sea igual al tercero (1, 2 y 3 centímetros), la “traducción” de esta relación también está relacionada con las posiciones de dos circunferencias: ya sea comenzando a construir el triángulo por el lado mayor o por uno de los menores, las circunferencias son tangentes, o sea que se cortan en un solo punto como muestran las siguientes figuras:



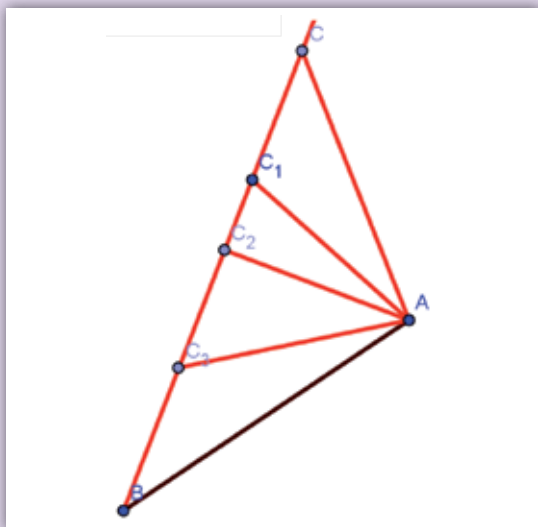
Podemos preguntarnos entonces, ¿para qué proponer estos problemas “modificados” en clase? Como decíamos en la introducción, las construcciones no son el fin, sino el medio para que los alumnos construyan conocimientos geométricos. Las modificaciones anteriores ponen de manifiesto que dados tres segmentos (o sus medidas) no siempre es posible construir un triángulo del que sean sus lados. Frente a estas construcciones es probable que los alumnos “fuercen” la figura para que el triángulo “cierre”. La discusión en torno a estas actividades y otras permitirá comenzar a “desconfiar de los dibujos” y abrir la discusión acerca de la posibilidad de construir cualquier triángulo dados sus lados. Por otra parte, ¿cómo podrían preguntarse los alumnos por esta condición, si todos los triángulos que han intentado construir son posibles?

Hemos puesto de manifiesto la relación entre los datos y la posibilidad de construir la figura. En otros términos, modificar algunas condiciones de un problema permitirá que la figura solicitada sea “imposible”; esto nos habilita a discutir las condiciones para que la figura exista.

***Construir un triángulo, conocido un lado y un ángulo.***

En este caso, la variable a controlar es *la relación* entre los datos, concretamente si el ángulo es adyacente o no al lado dado. ¿Por qué? Si el ángulo es adyacente al lado conocido, el tercer vértice pertenece a una semirrecta. En cambio, si el ángulo es opuesto al lado dado, encontrar el lugar geométrico del tercer vértice se vuelve un asunto un poco más complicado.

Para el primer caso, la posibilidad de encontrar infinitos puntos que sirven de tercer vértice (representado en la siguiente figura) quizá no sea evidente. En los hechos es probable que los alumnos encuentren un triángulo a partir de los datos y, por lo tanto, no establezcan la relación del ángulo con la semirrecta y menos aún con las infinitas soluciones. Lo expuesto nos exige estar atentos para que esto surja en la clase.



Sostenemos que solo las actividades no alcanzan para establecer relaciones; este problema brinda una oportunidad para tender puentes con el de construir un triángulo conocidos dos lados. Es importante incorporar como repertorio que “lado conocido” genera una circunferencia y “ángulo conocido” una semirrecta, como lugares geométricos de los puntos solución. Estas relaciones son objetivos de enseñanza y deberían volverse herramientas geométricas de primera línea para los alumnos.

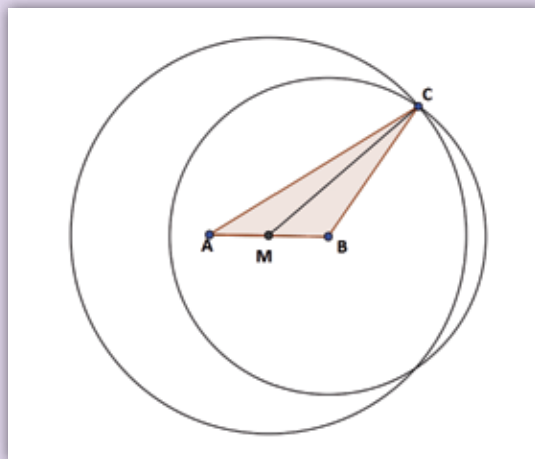
Queda por analizar qué sucede cuando el ángulo dado es opuesto al lado. ¿Cómo saber dónde ubicar el tercer vértice? ¿Qué conocimientos son necesarios para la construcción? Esta relación entre los datos necesita del “arco capaz”, y aunque excede los límites de este

artículo queremos rescatar nuevamente la importancia de las decisiones, en este caso, sobre qué ángulo dar como dato, lo que cambia radicalmente el procedimiento a utilizar.

Una investigación interesante surge al analizar la diferencia entre encontrar todos los vértices bajo esas condiciones o por lo menos uno. Agregar la condición de que el triángulo buscado sea isósceles permite determinar el vértice. Pensemos en un triángulo isósceles con un lado de 7 cm y ángulo opuesto de  $30^\circ$ . Con esta información, ¿qué conocimientos son necesarios para su construcción?

***Con regla no graduada y compás, construir un triángulo conociendo dos de sus lados y una mediana.***

Comencemos por fijar algunos datos: supongamos que los lados conocidos tienen 3 cm y 4 cm de longitud y la mediana con respecto al lado de 3 cm tiene 5 cm de longitud<sup>4</sup>. La construcción terminada se muestra en la figura siguiente:



Tenemos dos circunferencias auxiliares que sirven para fijar condiciones sobre el tercer vértice del triángulo: la circunferencia de centro B y radio 4 da cuenta de que el lado BC debe tener 4 cm de longitud; asimismo, C debe pertenecer también a la circunferencia de centro M (punto medio del lado AB) y radio 5 cm. Si bien hay dos opciones para el punto C, las dos intersecciones de la circunferencia, elegir una

<sup>4</sup> El problema moviliza otras relaciones si la mediana de la que se conoce la longitud tuviera como vértice el que es común a los dos lados que se dan y, por tanto, queda fuera de los objetivos que nos propusimos para este artículo.

u otra genera triángulos congruentes. El procedimiento de construcción desplegado remite al original del que partimos, en definitiva se trata del mismo problema pero aplicado sobre un triángulo auxiliar: el MBC. Esta estrategia es muy común en la resolución de problemas, se trata de llevar el problema que tenemos a uno que sí sepamos resolver.

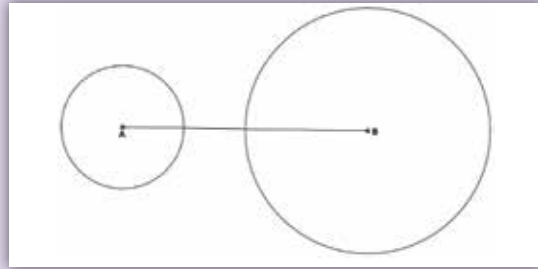
En esencia es un problema similar al de construir un triángulo, conocidos los tres lados; en este, el enriquecimiento se da al establecer esa relación intrafigural, en la que mediana, lado y “mitad del lado” pasan a conformar un triángulo que sirve como soporte para determinar el buscado.

Supongamos que dejamos fija la longitud de los dos lados conocidos, ¿podemos modificar la longitud de la mediana de cualquier forma? Atendiendo al comentario anterior, la respuesta es NO: el triángulo de lados MB, BC y CM debe existir; así que no existe, por ejemplo, un triángulo en el que AB sea de 4 cm, BC de 5 cm y MC mida 8 cm, ya que el MBC, el que construiríamos de forma auxiliar, tendría como longitudes de sus lados 2 cm, 5 cm y 8 cm. Como  $2 + 5$  es menor que 8 no se cumple una de las condiciones para que el triángulo exista.

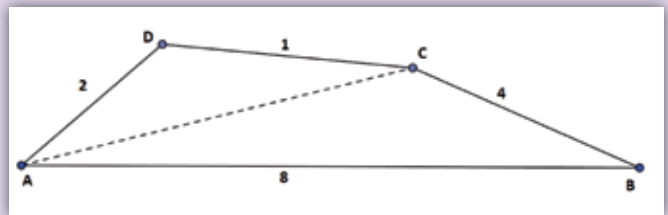
A lo largo del artículo hemos analizado algunos problemas sobre la construcción de triángulos desde la perspectiva de que la elección de cuáles son los datos de partida no es ingenua: puede que no exista solución, haya solo una, muchas o infinitas. Desde allí analizamos algunas relaciones interfigurales e intrafigurales. Sin dudas, esta perspectiva la podríamos adoptar en otros problemas de construcción, por ejemplo, en la de cuadriláteros y, solo como esbozo, decidimos terminar con uno equivalente al original:

*Construir un cuadrilátero, conocida la longitud de sus cuatro lados.*

Supongamos que los lados son 1 cm, 2 cm, 4 cm y 8 cm. Podríamos iniciar un procedimiento de construcción fijando el lado de 8 cm y determinando las opciones para los otros vértices con dos circunferencias:



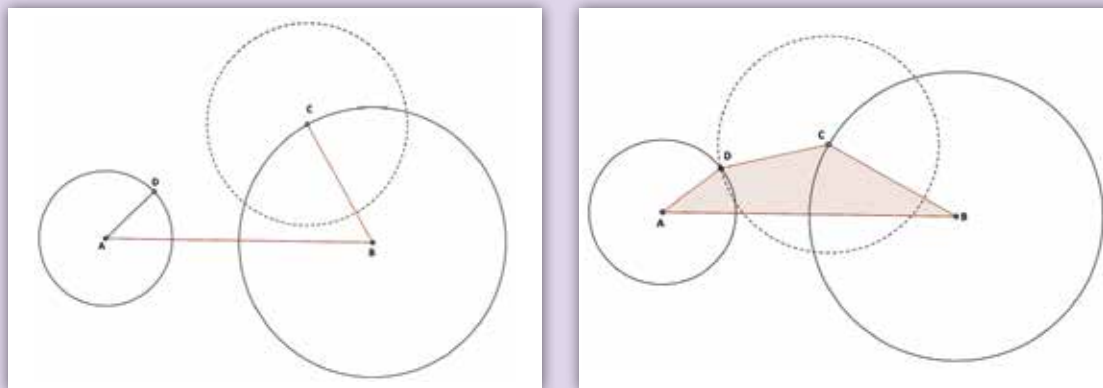
Las circunferencias tienen radios de 2 cm y 4 cm respectivamente, ¿podemos elegir un punto en una circunferencia y otro en la otra de forma que la distancia entre ellos sea de 1 cm? Siendo que la longitud del segmento AB es de 8 cm y recuperando los radios de las dos circunferencias, 2 cm y 4 cm, la distancia entre los puntos de intersección de ambas con el segmento es de 2 cm. Parece que no es posible construir un cuadrilátero con esas condiciones, al menos no con nuestro procedimiento. ¿Existe alguno que tenga esas medidas? Supongamos que sí, ¿qué ocurre, por ejemplo, con los triángulos ABC y ACD?



Cada uno de los lados de un triángulo debe ser menor que la suma de los otros dos; así, por ejemplo, si fijamos la atención en el ABC tenemos que 8, la medida de uno de los lados, es menor que la longitud del AC más 4, así  $8 < AC + 4$ . En el triángulo ADC, el lado AC debe medir menos que  $2 + 1$ , es decir que  $AC < 3$ . ¡Pero si le sumamos a 4 un número menor que 3 no puede darnos mayor que 8!

No existe un cuadrilátero cuyos lados midan 1 cm, 2 cm, 4 cm y 8 cm. Esbozamos dos argumentaciones de por qué no existe: en la primera nos apoyamos en un procedimiento de construcción en el que nos fue imposible terminar, mientras que en la segunda apelamos a algunas relaciones que debían satisfacer dos triángulos auxiliares (determinados por una de las diagonales del cuadrilátero).

Entonces, si decidimos fijar tres de los lados y modificar el cuarto para que sea posible construirlo, ¿cómo hacerlo? El procedimiento que intentamos en el caso anterior nos da una pista, por ejemplo, para el cuarto lado: debía ser mayor que 2 cm. Supongamos que miden 2 cm, 4 cm, 8 cm y 3 cm. Tomando una tercera circunferencia de radio 3 cm que esté centrada en alguno de los puntos, una de las otras circunferencias podríamos variarla, cambiando su centro, hasta que se corte con la otra circunferencia. En la figura siguiente incluimos dos opciones para esta tercera circunferencia:



Allí vemos que hay muchas opciones, infinitas, para centrar esa tercera circunferencia de modo que el cuadrilátero sí exista (tomamos la opción en la que el cuadrilátero es convexo, pero podríamos haber hecho otra elección).

Recapitulando: en el ciclo escolar suelen abordarse las condiciones para que, conociendo los lados de un triángulo, este exista; sin embargo, en el caso de los cuadriláteros el tratamiento de la problemática no es tan habitual. Dedicamos este último apartado para ver que las relaciones que se juegan siguen siendo las mismas, solo que enriquecidas por un entramado que va ganando en profundidad y en anchura. □

## Bibliografía

- CHAMORRO, María del Carmen (coord.) (2006): *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson Educación-Prentice Hall.
- CURTI, María del Carmen; PAZOS, Liliana (2014): "A la hora de planificar, ¿por qué elaborar secuencias de enseñanza?" en *QUEHACER EDUCATIVO*, N° 123 (Febrero), pp. 64-70. Edición Especial: "Saberes y quehaceres". Montevideo: FUM-TEP.
- FALZETTA, Ricardo (2008): "Conversaciones de Héctor Ponce investigador sobre el poder de la anticipación". En línea: <http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001/File/Entrevista%20a%20H%C3%A9ctor%20Ponce.pdf>
- FRIPP, Ariel; VARELA, Carlos (2012): *Pensar geoméricamente*. Montevideo: Grupo Magro editores.
- ITZCOVICH, Horacio (2005): *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- ITZCOVICH, Horacio (coord.) (2009): *La Matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor. Colección: Carrera Docente. Serie: El abecé de...
- SADOVSKY, Patricia; PARRA, Cecilia; ITZCOVICH, Horacio; BROITMAN, Claudia (1998): *Matemática. Documento de trabajo N° 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*. Buenos Aires: Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula. En línea: <http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matemat/doc5.pdf>
- SCHWAB, Joseph (1973): "Problemas, tópicos y puntos en discusión" en S. Elam (comp.): *La educación y la estructura del conocimiento*. Buenos Aires: Ed. El Ateneo.