Operaciones con *"significado"* *

Valentina Jung | Mercedes Laborde | Ana Laura Lujambio
Maestras. Formadoras de maestros en Enseñanza de la Matemática.

La enseñanza de las operaciones ha sido y continúa siendo una preocupación para los maestros de Educación Primaria. Sin embargo, en muchos casos esta preocupación se centra y se reduce al aspecto mecánico del algoritmo. En el discurso de los maestros, aún hoy es posible encontrar expresiones que dan cuenta de la reducción de la operación al algoritmo. Incluso reconociendo la necesidad de abordar los distintos significados de las operaciones, al analizar sus planificaciones hay quienes encuentran que han focalizado un único significado en variadas ocasiones.

Con respecto al orden de aparición de las operaciones en el ciclo escolar, parecería que la enseñanza de la división y de la multiplicación se realiza con posterioridad a la de la suma y la resta.

Una posible explicación que busca fundamentar esta práctica es que para abordar la multiplicación y la división es necesario consolidar previamente ciertas nociones numéricas.

Otra creencia muy extendida entre los docentes es pensar que la responsabilidad de la enseñanza de las operaciones está en las clases de los primeros niveles. De esta manera se instala en el imaginario docente la idea de que, llegados a los grados superiores, los niños "dominan los algoritmos".

Al respecto, se desprenden algunos interrogantes: operaciones y algoritmos, ¿son sinónimos? ¿Es suficiente dominar el algoritmo para poder utilizarlo en la resolución de problemas? ¿Es posible depositar la responsabilidad de la enseñanza de las operaciones en un nivel o bien debería ser producto del trabajo sistemático, coordinado y secuenciado a lo largo de todos los años de escolaridad?

¿Qué entendemos cuando hablamos de operaciones y de algoritmos? ¿Nos referimos a lo mismo?

En el Curso de Apoyo a la Enseñanza de la Matemática para Maestros de Escuelas Comunes, 2011, hemos abordado este análisis acordando que el contenido operaciones encierra una serie de aspectos (significados, relaciones entre operaciones, relaciones entre estas y el Sistema de Numeración Decimal, propiedades, relaciones entre ellas, cálculo, algoritmos, resignificación de las operaciones entre los diferentes conjuntos numéricos, notación [*cf.* Rodríguez Rava, 2005:130]) todos igualmente importantes y que, trabajados a lo largo de los años escolares, favorecen la construcción del concepto de operaciones. Por lo tanto, hablar de operaciones implica tomar en cuenta varios aspectos; "algoritmos" es uno de ellos.

* Tomado y adaptado de "Operaciones con '*significado*'", documento producido por las autoras como integrantes del Equipo de Matemática del Proyecto de Apoyo a la Escuela Pública Uruguaya (Noviembre 2011).

Estas afirmaciones ponen de relieve la trascendencia de realizar acuerdos institucionales para el abordaje de las operaciones, de manera de favorecer la coordinación curricular desde el Nivel Inicial hasta Sexto grado. Esto habilita la toma de decisiones por parte del docente con una intencionalidad clara y sustentada teóricamente.

En este artículo desarrollamos uno de los aspectos a ser considerados en la planificación de la enseñanza de las operaciones: **"significados de las operaciones"**, contenido de carácter didáctico que implica **contemplar las distintas situaciones de uso en las que se enmarcan las operaciones**. Es el contexto cotidiano (cercano o lejano), preferentemente, el que habilita el análisis de los significados de las operaciones generando, en función de la situación elegida, diferentes relaciones numéricas.

El **cálculo relacional**, considerado como *«el que sólo es posible y sólo tiene validez cuando se apoya en las propiedades de las relaciones en juego»* (Vergnaud, 1991) cobra, de esta manera, relevancia. Alicia Ávila (1995) expresa que el cálculo relacional *«hace referencia a las operaciones de pensamiento necesarias para evidenciar las relaciones que hay entre los elementos de la situación-problema»*. Se diferencia, agrega, del cálculo operatorio en *«que se refiere a las operaciones aritméticas en el sentido tradicional del término»* en el que se trabaja, a través de un contexto intramatemático, el cálculo numérico exclusivamente.

El cálculo relacional, ante situaciones que se resuelven con un mismo cálculo, es considerado por algunos investigadores (Vergnaud, Descaves, Ávila) como generador de la dificultad de la situación planteada. Esta afirmación "tira por tierra" algunas expresiones clásicas: *"los problemas de sumar son más fáciles que los de restar", "los problemas de multiplicar son más fáciles que los de dividir"*. La dificultad, entonces, radica en cómo se entretejen los datos del problema y no en la operación que lo resuelve.

¿Por qué es importante trabajar los significados?

Porque los significados constituyen uno de los aspectos que ayudan a la **construcción del sentido** de cada operación.

Rodríguez Rava y Silva Palumbo (2005:154) plantean: *«El trabajar los diferentes significados y las distintas representaciones da la posibilidad de identificar las múltiples relaciones que existen entre las operaciones así como también las propiedades de las mismas»*. De esta manera, la construcción del concepto de operación requerirá proponer situaciones diversas al alumno, que se resuelvan con la misma operación (igual operación – diferente significado) así como otras donde se ponga en juego el mismo significado con variaciones en el lugar de la incógnita, habilitando así la utilización de diferentes operaciones.

Al entender que *«el conocimiento consiste en establecer relaciones»* y que *«todo razonamiento matemático puede ser analizado como un cálculo relacional»* (Vergnaud, 1991) destacamos la importancia de trabajar los problemas aditivos y multiplicativos a través del establecimiento de variadas relaciones entre los datos brindados en el enunciado del problema.

Vergnaud (1991) afirma que el proceso de consolidación de la competencia matemática en los alumnos es lento y de larga duración: *«Se necesitan a menudo dos o tres años para una sola categoría de problemas aparentemente semejantes, y a menudo aún más»*.

Nos preguntamos: ¿se tienen en cuenta estas premisas para la enseñanza de las operaciones? ¿Se le da al niño el tiempo suficiente para familiarizarse con este objeto matemático a través del abordaje de distintos problemas aditivos y multiplicativos? ¿Se consideran las diversas categorías de problemas que hacen a la construcción del sentido de la suma, resta, multiplicación y división?

Hablar de **sentido y significado** es referirnos a dos cuestiones distintas; el primero se logra después de un recorrido por los diferentes aspectos, es una construcción a largo plazo, personal del alumno. El segundo se refiere a los significados de las operaciones, que se ponen en juego en las diferentes situaciones en las que los datos se relacionan de distinta forma según cada caso, aspecto este que debe considerar el docente.

¿Qué se entiende por estructuras aditivas y multiplicativas?

Los conceptos de estructuras aditivas y multiplicativas son **constructos teóricos complejos** que encierran mucho más que solo situaciones que se resuelven por adición, sustracción o la combinación de ambas en un caso, o por multiplicación, división o la combinación de ambas en otro. Las estructuras aditivas y multiplicativas son dos de los cuatro campos conceptuales definidos por Vergnaud (1991)[1].

Para este autor, un **campo conceptual** se define como *«el conjunto de situaciones cuyo dominio progresivo requiere la utilización de una variedad de procedimientos, de conceptos y de representaciones simbólicas que están en estrecha relación»*. Por lo tanto, el campo conceptual de las estructuras aditivas incluye *«conceptos de adición y de sustracción, (...) de medida, de parte y de todo, de estado y transformación, de comparación, de composición binaria y de operador unitario, de número relativo, de abscisa, etc.»*

«Las estructuras multiplicativas incluyen la multiplicación y la división por una parte, la proporcionalidad, el reconocimiento de la relación escalar, razones, cociente y producto de dimensiones, fracción, número racional, múltiplo, divisor...» (Vergnaud, 1990).

De esta definición se desprende la necesidad de reflexionar acerca de la utilización de estos términos: estructuras aditivas y multiplicativas. Cuando enseñamos, estamos trabajando la adición o la sustracción, pero no las estructuras aditivas, constructo teórico de gran profundidad y amplitud proveniente de la psicología, explicitado anteriormente.

Vergnaud explica que un **concepto**:

- adquiere sentido a través de *diversas situaciones que soluciona*,
- pone en juego *un conjunto de invariantes que lo caracterizan* (propiedades del concepto) y
- *es representado por un conjunto de símbolos*.

[1] Gérard Vergnaud, psicólogo francés, autor de *La Teoría de los Campos Conceptuales*, teoría de interés para la Didáctica de la Matemática pues ofrece información acerca del aprendizaje.

El sentido se adquiere, entonces, a través de las diferentes situaciones (no a través de un solo tipo de situaciones) que dan significado al concepto pues aportan variadas propiedades, y con los significantes (representaciones simbólicas) que lo representan.

A partir de estas afirmaciones, Vergnaud plantea:

- Los conceptos se relacionan unos con otros generando una red de relaciones.
- Para trabajarlos debemos crear múltiples situaciones de enseñanza en las que ese concepto sea la herramienta de resolución. Por ejemplo, una situación que involucre la suma y haga que esta operación sea la solución canónica, aun cuando el niño no la utilice para resolverla y busque otros procedimientos tal vez correctos (conteo, sobreconteo, dibujos) o incorrectos.
- En cada situación que el niño resuelve, realiza la representación del problema a través de diferentes sistemas simbólicos (números, lenguaje natural, esquemas). Cada una de estas situaciones aporta a la construcción del sentido del concepto trabajado.

Con respecto a este tercer punto y siguiendo a Vergnaud, podemos afirmar que el pensamiento no funciona de manera lineal, sino que "trabaja" en diferentes niveles de complejidad y recurre a variados sistemas simbólicos de representación (verbal, mental, algebraico) según sus necesidades. *«Pensar consiste no sólo en pasar de una situación real a la representación, sino en pasar de una representación a otra, y regresar»* (Vergnaud, 1991). Cada una de estas representaciones (formas lingüísticas y no lingüísticas), que pueden ser utilizadas por el maestro en una propuesta de enseñanza, generan en el alumno diferentes relaciones, diferentes maneras de representar simbólicamente al concepto y activan distintos aspectos de ese concepto trabajado. Al mismo tiempo, la presentación de situaciones permitirá al niño acudir a esas representaciones simbólicas que responden como herramientas del pensamiento, generadoras de relaciones y de la organización de la acción. Una representación podrá tener un sentido, varios sentidos o ningún sentido para el alumno, según como sean las relaciones que haya establecido con ella.

Problemas aditivos

Según Vergnaud (1991), *«la complejidad de los problemas de tipo aditivo varía en función, no sólo de las diferentes categorías de relaciones numéricas, sino también en función de las diferentes clases de problemas que se pueden plantear para cada categoría»*.

De las seis relaciones aditivas básicas que el citado autor establece, nos detendremos en tres de ellas:

- **Primer caso** – Dos medidas componen una tercera.
- **Segundo caso** – Una medida sufre una transformación y da lugar a otra medida.
- **Tercer caso** – Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación.

Considerando las relaciones mencionadas se incluye el trabajo con los significados generados por problemas aditivos que pueden dar lugar a operaciones de suma o de resta.

Relaciones aditivas

Primer caso – Dos medidas componen una tercera

De los libros prestados, 9 son de Geografía y 8 son de Historia. ¿Cuántos libros se prestaron?

En este caso hay dos medidas presentes (los 9 libros de Geografía y los 8 de Historia), y se pregunta por la composición de ambas medidas. Es una situación que se resuelve con una suma, y el modelo de la estructura del problema coincide con el modelo de la resolución:

Modelo de la estructura del problema	Modelo de la resolución
a + b = ?	a + b

Esta situación, que pone en juego **el significado "unir o juntar"** de la suma, se caracteriza por la presencia de las dos medidas desde el inicio: los libros de Geografía y los de Historia.

¿Qué tipo de problemas se podrían generar a partir de esta situación?

De los 17 libros prestados, 9 son de Geografía y... son de Historia.

En esta situación también entran en juego dos medidas: la cantidad de libros de Geografía y la cantidad de libros de Historia para componer una tercera medida, el total de libros prestados. En este caso, la incógnita es una de las medidas iniciales: cantidad de libros de Historia, siendo la estructura del problema a + ? = c

Sin embargo, el modelo de resolución varía: c - a.

Según la categorización de Descaves (1992), la estructura que modeliza la situación es discordante con la operación que la resuelve. Es un problema de suma que se resuelve a través de una resta, en este caso con el **significado de separar**. Alicia Ávila (1995) sostiene que en esta situación, la resolución *«implica realizar una inversión en el planteamiento y por lo tanto en el razonamiento»*. La sustracción aparece como subordinada con respecto a la adición. Según Vergnaud, la comprensión por parte de los alumnos de esta forma de sustracción encierra mayor dificultad que la de la resta inversa a la adición. Los dos problemas analizados tienen diferente dificultad para los niños por la forma en que se relacionan los datos, que hace que la incógnita ocupe un lugar diferente en cada uno de ellos. En el primero se busca el resultado de la composición de medidas y en el segundo la incógnita es una de las medidas iniciales constitutivas de la composición final.

Como hemos visto, esta primera categoría solo origina dos clases de problemas: aquel en el que lo que se desconoce es la composición de medidas y aquel en el que se desconoce una de las medidas iniciales.

Segundo caso – Una medida sufre una transformación y da lugar a otra medida

Dentro de esta categoría analizaremos los siguientes significados: quitar/agregar, avanzar/retroceder y comparar.

> a) Pedro junta pegotines y los guarda en una caja. Tenía 76 pegotines, pero le regaló 8 a su primo. ¿Cuántos pegotines tiene ahora en su caja?

En este caso hay una medida inicial (los 76 pegotines) sobre la que opera una transformación para dar lugar a otra medida. Se trata de una transformación negativa que determina que **la sustracción que resuelve la situación tenga determinada significación: perder, dar, quitar**.

La estructura de la situación es a - b = c y se resuelve con la operación 76 - 8, existiendo en este caso coincidencia entre el modelo de la estructura del problema y el modelo de la resolución.

¿Cuáles son las clases de problemas que se pueden plantear para esta categoría de relaciones numéricas?

> b) Pedro tenía 76 pegotines en una caja. Le regaló algunos a su primo y ahora tiene 68. ¿Cuántos pegotines le regaló a su primo?

> c) Pedro le regaló 8 pegotines a su primo. Ahora tiene 68 pegotines. ¿Cuántos pegotines tenía antes?

A diferencia de la categoría anterior (significados unir/separar), esta genera tres tipos de problemas dependiendo del lugar de la incógnita:

	Modelo de la estructura del problema	Modelo de la resolución
a)	a - b = ?	a - b
b)	a - ? = c	a - c
c)	? - b = c	b + c

De acuerdo a lo que hemos venido planteando, el problema c) es el que genera la mayor dificultad para los niños, pues la discordancia entre ambos modelos exige operaciones de pensamiento complejas. La incógnita se ubica en el estado inicial.

Sin embargo, los problemas que tienen mayor presencia en las aulas son los correspondientes al significado quitar, caso a).

Si modificáramos la situación planteada en a), convirtiéndola en una transformación positiva, generaríamos nuevos problemas.

> a) Pedro junta pegotines y los guarda en una caja. Tenía 76 pegotines, pero le regalaron 8. ¿Cuántos pegotines tiene ahora en su caja?

Estamos frente a una situación que se resuelve con una adición y el significado **es agregar**. Implica un cambio, un aumento de pegotines. Podemos identificar un estado inicial con 76 pegotines, luego una transformación (8 pegotines) y un estado final que se desconoce. La incógnita se ubica en este último.

Como en el ejemplo anterior, el lugar donde se encuentre la incógnita genera tres tipos de problemas que se detallan en el siguiente cuadro:

	Modelo de la estructura del problema	Modelo de la resolución
a)	a + b = ?	a + b
b)	a + ? = c	c - a
c)	? + b = c	c - b

Para los alumnos, los casos b) y c) encierran mayor dificultad, dado que son problemas que implican ganancias, aumentos, y sin embargo se resuelven con una resta.

En el caso b), la incógnita se encuentra en la transformación:

> b) Pedro junta pegotines y los guarda en una caja. Tenía 76 pegotines, pero le regalaron algunos más. Ahora tiene 84. ¿Cuántos pegotines le regalaron?

Los operadores semánticos "regalaron" y "más" dan idea de aumento, y el niño los vincula directamente con la suma. Sin embargo, es la resta la operación que resuelve esta situación.

En el caso c), la incógnita se ubica en el estado inicial:

c) Pedro junta pegotines y los guarda en una caja. El día de su cumpleaños le regalaron 8 más. Ahora tiene 84. ¿Cuántos pegotines tenía antes en su caja?

Este problema es visto por algunos investigadores (Vergnaud, Ávila, Chamorro) como "el más difícil", dado que la falta de cronología de los hechos ocurridos genera problemas de comprensión en el análisis. La cantidad inicial de pegotines se desconoce. El alumno debe retrotraerse a la cantidad de pegotines antes del cumpleaños, que es la información solicitada. Nuevamente los operadores semánticos "le juegan en contra". Debe restar 84 - 8, aunque el texto le habla de "regalaron".

En esta categoría, en la que hay una medida y una transformación, surge **un nuevo significado**: **avanzar**; significado que es poco trabajado en las aulas.

Andrea estaba en el casillero 16. Tiró el dado y sacó 5. ¿En qué casillero se encuentra ahora?

Algunos autores lo consideran como un caso particular de "agregar"; con la diferencia de que en "avanzar", el resultado final expresa una relación de orden (*Estoy en el casillero 21*), mientras que en "agregar", el resultado final expresa el valor cardinal del número (*Tengo 84 pegotines*).

Como en casos anteriores, el lugar de la incógnita puede variar y ubicarse:

- en el estado inicial

Andrea estaba en un casillero que no recuerdo. Tiró el dado y sacó 5. Ahora está en el 21. ¿En qué casillero se encontraba?

- en la transformación

Andrea estaba en el casillero 16. Tiró el dado y sacó un número. Ahora está en el casillero 21. ¿Qué número sacó en el dado?

- en el estado final como se observa en la situación original.

En todos estos casos se trabaja el significado "avanzar". Los datos se relacionan de manera tal que da lugar a que la incógnita aparezca en distintos lugares.

Veamos este otro ejemplo:

Juan y Dante juegan al juego de las carreras de autos. Dante está en el casillero 43. Saca una tarjeta que dice que debe retroceder 7 lugares. ¿En qué casillero se encuentra ahora?

Estamos frente al **significado retroceder**. La transformación es negativa. También, como en ejemplos anteriores, la incógnita puede ubicarse en el estado inicial, transformación o estado final.

Cabe aclarar que cuando los niños juegan y adelantan o retroceden tantos casilleros como indica el dado, el interés primordial está puesto en el juego en sí mismo. Mientras juega, el niño no necesita "pensar" en la relación de los datos que se le presentan en la situación. Por lo tanto, si se elige el contexto lúdico para abordar este significado se debe apelar a la evocación posterior a las situaciones de juego.

Brindamos un nuevo ejemplo del significado "avanzar", en otro contexto:

En una marcha a caballo desde Montevideo estamos en el kilómetro 210 y quedan 230 km por recorrer. ¿En qué kilómetro termina la cabalgata?

Hasta este momento hemos analizado los siguientes significados:

Operación	Significado
Suma	▶ Agregar ▶ Unir ▶ Avanzar
Resta	▶ Quitar ▶ Separar ▶ Retroceder

Tercer caso – Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación

En esta categoría, tal como en las anteriores, se pueden presentar distintas clases de problemas. En todos se componen dos transformaciones en una tercera.

> Federico tiene 16 bolitas. Juega dos partidos: en el primero gana 4, en el segundo gana 6. ¿Cuántas bolitas tiene ahora?

En el ejemplo que damos, se parte de un estado inicial representado con 16 bolitas sobre el que operan dos transformaciones, ambas positivas: gana 4 y gana 6. Se pregunta por el estado final. Dos transformaciones positivas componen una tercera.

Veamos esta otra situación:

> Federico juega a las bolitas. En el primer partido gana 6 y en el segundo pierde 4. ¿Tiene más o menos bolitas que antes?

En este caso, también operan dos transformaciones. A diferencia de la actividad anterior, no se parte de un estado inicial, y una de las transformaciones es negativa (pierde cuatro bolitas).

Veamos qué ocurre en este ejemplo:

> Federico juega a las bolitas. En el primer partido gana 4 y en el segundo pierde 6. ¿Tiene más o menos bolitas que antes?

Al igual que en la situación anterior, opera una transformación positiva y una negativa. La diferencia radica en que la transformación positiva es menor a la negativa. Federico primero gana 4 bolitas, pero luego pierde más de lo que había ganado.

Comparando los ejemplos presentados es posible observar que el cálculo relacional incide fuertemente en la dificultad de la situación. El primer caso puede considerarse más fácil, pues se trata de agregar al estado inicial lo obtenido a través de dos transformaciones.

En el segundo caso, la complejidad es mayor, dado que la relación se establece entre las transformaciones y no se parte de un estado inicial.

El último ejemplo, si bien puede parecer muy similar al anterior, es el que implica mayor dificultad para el niño. El hecho de que la transformación positiva sea menor a la negativa exige "sacar" a lo que perdió lo que ganó, y que el resultado de esa operación sea un número negativo.

Vergnaud reconoce que, si bien estos problemas son difíciles para los alumnos del tercer nivel de enseñanza primaria, es importante iniciar su tratamiento en la escuela.

En el siguiente cuadro se presentan algunas clases de esta categoría.

Primera transformación	Segunda transformación	
+	+	Se agregan dos números positivos.
-	-	Se agregan dos números de signo negativo.
+	-	Se agregan dos números de signos contrarios.[3]
-	+	Se agregan dos números de signos contrarios.[4]

Un caso particular de la resta

Abordaremos un nuevo significado, exclusivo de la resta, que no integra ninguna de las categorías antes mencionadas. Presentamos la siguiente situación:

> Camila hizo 75 collares y Paula hizo 23. ¿Quién tiene más? ¿Cuántos collares más tiene?

Existe una **comparación** (significado "comparar") entre los collares que tiene Camila (referido) y los que tiene Paula (referente). La comparación se evidencia en la pregunta: *¿Quién tiene más?* La segunda pregunta: *¿Cuántos collares más tiene?* "obliga" a responder con una cantidad que exprese numéricamente la comparación solicitada.

[3] Nótese que en este caso, el signo de la transformación compuesta dependerá de la relación entre las medidas de cada uno de los valores.
[4] *Ídem.*

En este caso se requiere buscar la diferencia entre lo que tiene Camila y lo que tiene Paula. Existe una incongruencia lingüística, ya que se pregunta: *¿Cuántos más tiene?* y el problema se resuelve con una resta. El marcador semántico "más" agrega dificultad a la situación. En estos problemas de comparación, las cantidades no sufren ninguna alteración. Hay una cantidad que es la que se compara en relación a otra que hace de referente.

Tal como hemos analizado en otros problemas, la incógnita en este caso puede estar en el referido, en el referente o en la diferencia que resulta. Si a esta misma situación le introducimos una variante, **el significado es igualar**. Existe una comparación y una igualación de cantidades.

Camila hizo 75 collares y Paula hizo 23. ¿Cuántos collares debe hacer Paula para tener igual cantidad que Camila?

Hay maestros que sostienen que las situaciones de "igualar" son más difíciles de resolver para el niño. Efectivamente, existen investigaciones (Verschaffel y De Corte, 1996) que plantean que estos problemas presentan dificultad al alumno. Estos investigadores y otras (Stern, 1993; Clark, 1973) expresan que parte de la dificultad radica en el uso de palabras clave (más, menos) incongruentes, en algunos casos, con la operación que resuelve la situación.

Problemas de tipo multiplicativo

Estos problemas requieren una multiplicación o una división para su resolución.

Con respecto a los problemas multiplicativos, basándonos en Vergnaud, podemos distinguir tres categorías:

- Proporcionalidad
- Producto escalar
- Producto cartesiano.

Proporcionalidad

Este significado es el que aparece con mayor frecuencia en el aula cuando se trabaja la multiplicación.

Analicemos el siguiente ejemplo:

Muchos niños coleccionaron el álbum de "La Era de Hielo". Cada sobre de figuritas traía 5 unidades. Si José compró 6 sobres, ¿cuántas figuritas tendrá?

En esta situación entran en juego dos espacios de medida, figuritas y sobres, y se pregunta por uno de ellos, cantidad total de figuritas. Se establece una relación cuaternaria, donde intervienen cuatro números que se relacionan en la situación, tal como se ve en la tabla:

Sobres	Figuritas
1	5
6	?

El problema se resuelve con una multiplicación: 5 x 6.

Ahora bien, ¿qué ocurre si establecemos otras relaciones entre los datos?

Muchos niños coleccionaron el álbum de "La Era de Hielo". José compró 6 sobres. Ahora tiene 30 figuritas, ¿cuántas figuritas trae cada sobre?

En este caso, a diferencia de la situación anterior, se conoce la cantidad total de figuritas y la cantidad de sobres que compró, se pregunta por la cantidad de figuritas que trae cada sobre.

Sobres	Figuritas
1	?
6	30

El problema se resuelve con una división, la cantidad de figuritas total se divide por la cantidad de sobres que compró José: 30 : 6. El dividendo y el divisor representan dos espacios de medida diferentes (figuritas y sobres). El cociente representa la cantidad de figuritas que trae cada sobre. La división aparece con el significado de "reparto".

Analicemos ahora otra variante:

Muchos niños coleccionaron el álbum de "La Era de Hielo". José compró sobres de figuritas. Ahora tiene 30 figuritas. Si cada sobre trae 5 figuritas, ¿cuántos sobres compró?

Esta actividad también se resuelve con una división, pero con un significado distinto: "agrupamiento". El dividendo y el divisor representan el mismo espacio de medida (figuritas).

Sobres	Figuritas
1	5
?	30

En el caso de problemas de proporcionalidad, algunos se resuelven con una multiplicación y otros con una división. En el caso de la multiplicación, el significado es "proporcionalidad" y la división aparece como "reparto" o como "agrupamiento".

En algunos casos, la relación entre los cuatro datos es a veces difícil de identificar. En el primer ejemplo, al decir *"cada sobre trae 5 unidades"* cuesta ver en el "cada sobre" a la unidad y reconocerla así como el cuarto dato.

A efectos de enriquecer este significado ofrecemos otra situación en la que existe un nivel de complejidad mayor, dado que se ponen en juego varias relaciones de proporcionalidad. Nos presenta la posibilidad de abordar dichas relaciones sin recurrir, obligatoriamente, al cálculo unitario.

En una empresa van a hacer la compra anual de artículos de librería. Para saber cuánto comprar de cada artículo, calcularon lo que se usa en un sector de 3 empleados.

Artículo	3 empleados	12 empleados	60 empleados
Marcadores	36		
Lapiceras	18		
Clips	300		
Hojas	750		

Habitualmente, este tipo de situación se presenta para "aplicar" la regla de tres como un algoritmo mecanizado, sin considerar las relaciones de proporcionalidad que se establecen entre los datos involucrados. Sin embargo, dados los números en juego en este problema, es posible resolverlo sin utilizarla. Para calcular la cantidad de artículos necesarios, en cada caso, se puede considerar la relación que existe entre el número de empleados que aparece en una y otra columna. De esta manera, si 3 empleados precisan 36 artículos, 12 necesitarán 4 veces más, y 60 empleados requerirán 5 veces más que lo necesario para 12 empleados o 20 veces más que lo que necesiten 3.

En la escuela es importante presentar ambos tipos de problemas en virtud de que el cálculo relacional que se establece en cada caso es distinto y ello determina diferentes niveles de complejidad.

Producto escalar

El producto escalar es otro de los significados que puede tener la multiplicación. En los problemas de esta categoría se establece una relación numérica, en la que entra en juego un solo espacio de medida y un operador que no representa ninguna magnitud y que se manifiesta en expresiones del tipo: tantas veces más, tantas veces menos, el doble, el triple, la mitad; como se aprecia en los siguientes ejemplos:

1) Lucía tiene 12 galletas para compartir, Paula tiene tres veces más. ¿Cuántas galletas tiene Paula?
2) María cobra mensualmente 14.300 pesos, su hija recibe el doble y su esposo el triple. ¿Cuánto ganan su hija y su esposo?

Los datos que se dan y la forma en que estos se relacionan, determinan cambios en el lugar de la incógnita, sin generar nuevos significados. En estas dos situaciones presentadas, la incógnita se encuentra en el producto.

Si cambia la relación entre los datos, la incógnita se ubica en el lugar del operador:

Lucía preparó 12 galletas y Paula 36. ¿Cuántas veces más preparó Paula que Lucía? (o bien, ¿cuántas veces menos preparó Lucía que Paula?).

Esta situación se resuelve a través de una división: 36 : 12.

El cociente es el operador escalar, no un segundo espacio de medida como veíamos en el caso de la división como agrupamiento. Por lo tanto, estamos frente a un problema de producto escalar (siempre existe un solo espacio de medida) en el que el cambio del lugar de la incógnita determina que se resuelva con una división.

Lucía preparó galletas. Paula hizo 36 galletas, tres veces más que Lucía. ¿Cuántas galletas preparó Lucía?

En este caso, el cociente representa el mismo espacio de medida que el dividendo. No representa ninguna magnitud, por lo que la división no cobra ningún significado particular.

Algunos autores que han estudiado estos problemas desde un plano lingüístico (Carretero, 1989; Castro Martínez, 1991), afirman que estos son difíciles de resolver para los niños porque les dificulta comprender la relación comparativa expresada en “tres veces más”, “tres veces menos”. Tienden a sumar en el primer caso y a restar en el otro.

Producto cartesiano

Es otro de los significados de la multiplicación. En este tipo de problemas se establece una relación ternaria entre tres cantidades: dos espacios de medida diferentes cuyo producto genera un tercer espacio.

Mariana juega a las muñecas. Tiene tres polleras de diseños diferentes y cuatro pares de zapatos de colores distintos. ¿Cuántos conjuntos puede armar para vestir a las muñecas?

En el ejemplo planteado, las polleras y los zapatos constituyen dos espacios de medida. La relación entre estos dos espacios da lugar a un tercer espacio: los conjuntos.

La estructura del problema está dada por un producto de medidas y puede ser diagramado a través de un cuadro de doble entrada, llamado cuadro cartesiano.

La incógnita puede ubicarse en cualquiera de los dos espacios de medida (polleras o zapatos) o en el producto de los mismos. Conociendo los conjuntos y uno de estos espacios mencionados, por ejemplo, polleras, se busca encontrar el otro espacio, zapatos, a través de la división 12 : 3.

En la escuela también es posible encontrar situaciones de este tipo:

Juliana está planeando sus vacaciones. Antes de decidirse, analiza las formas posibles de hacer el viaje. Tiene que elegir el lugar, el alojamiento y el medio de transporte. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

Lugar	**Alojamiento**	**Transporte**
Solís	hotel	auto
Atlántida	apartamento	micro
Pirlápolis	carpa	
La Paloma	cabaña	
Punta del Diablo		

En este caso aparecen tres espacios de medida (lugar – alojamiento – transporte) para generar una combinación entre ellos. Como ya hemos dicho, en las situaciones de producto cartesiano se debe establecer una relación entre dos espacios de medida. Por lo tanto, para resolver esta situación corresponde primero hallar el producto cartesiano entre dos de los espacios de medida, y luego calcular un segundo producto cartesiano entre el resultado del primer producto y el tercer espacio de medida. Obviamente, el cuadro de doble entrada en este caso no resulta eficaz como estrategia de resolución.

Por lo expuesto anteriormente, este tipo de situación no es pertinente para trabajar inicialmente el significado de producto cartesiano. Por otro lado consideramos que es un problema potente para trabajar la organización de la información y el conteo.

A partir del análisis de las tres categorías podemos concluir que los problemas multiplicativos generan distintos tipos de relaciones multiplicativas. En esas relaciones, la operación que resuelve el problema puede ser división o multiplicación, o ambas.

Así lo clarifica el siguiente cuadro:

Multiplicación	**División**
Proporcionalidad	Reparto Agrupamiento
Producto escalar	
Producto cartesiano	

Tal como se aprecia, la división ligada a situaciones de proporcionalidad posee dos significados diferentes (“reparto” y “agrupamiento”). En el caso de situaciones de producto escalar o de producto cartesiano, la división no adopta el significado ni de reparto ni de agrupamiento.

Según cómo se relacionen los datos, la división será la operación adecuada dentro del significado escalar o cartesiano.

Algunos casos particulares

No siempre es tarea sencilla identificar, a través de situaciones propuestas, los significados puestos en juego en cada actividad. A veces, la relación de los datos presentados dificulta esta categorización y el maestro se pregunta: ¿Cuál es el significado que surge de esta situación?

Veamos el siguiente ejemplo:

> Una maestra corrige 14 cuadernos antes del recreo y 12 después del recreo. ¿Cuántos cuadernos corrige ese día?

Si se analiza detenidamente este enunciado, es posible considerar lo sucedido en la mañana como un "estado" sobre el que ocurre una transformación representada por los 12 cuadernos en este caso, y se obtiene un estado final. Es la presencia del indicador temporal "después del recreo" la que habilita a interpretar que los doce cuadernos se "agregan" a la cantidad inicial.

Sin embargo, cabe la posibilidad de pensar en ambas cantidades como representativas de colecciones o estados ya constituidos, presentes en el mismo día, sin darle relevancia al factor tiempo. En este caso, el significado de la suma es el de "reunir".

De esto se desprende que ambas interpretaciones podrían ser pertinentes. Lo importante para los docentes, a la hora de planificar la enseñanza de las operaciones, es presentar una variedad de situaciones que contemplen los diferentes significados.

También puede suceder que el problema, al involucrar más de una operación, presente más de un significado:

> Lucas concurre a una biblioteca y se informa de que hay 6400 libros distribuidos de la siguiente manera:
> - 800 libros de Historia en el sector izquierdo.
> - 1600 de Geografía en el sector derecho.
> - 1200 libros de Arte están en la Planta Alta y el resto, de cultura general, está en el Sector Central.
>
> ¿Cuántos libros hay en cada sector?

En esta situación, las operaciones que la resuelven son la suma y la resta. Corresponde entonces analizar el significado involucrado en cada caso: en la suma, "reunir"; en la resta, "separar".

Reflexión final

A lo largo de este trabajo hemos intentado promover la reflexión acerca de afirmaciones que entendíamos muy arraigadas.

Llegados a este punto del recorrido, estamos en condiciones de hacer algunas puntualizaciones importantes acerca de la enseñanza de las operaciones en la Escuela Primaria:

- Hablar de enseñar operaciones implica considerar **variados aspectos** que contribuyen a construir el sentido de ese concepto. Entre estos aspectos cabe mencionar: significados, notación, propiedades, algoritmo, relaciones entre propiedades, relaciones con el SND. Por lo tanto, enseñar a operar es mucho más que enseñar la técnica algorítmica (Rodríguez Rava, 2005).
- En cuanto a los significados, evidentemente hay algunos que se trabajan más que otros. Tal es la situación de "quitar" y "separar" en el caso de la sustracción, y "agregar" y "unir" en el caso de la adición. Si nuestra tarea docente consiste en hacer avanzar la conceptualización de las operaciones, vale pensar qué aportes genera el abordaje casi exclusivo de los significados antes mencionados. Estos significados son los que, según Vergnaud, el niño construye antes de ingresar a los primeros grados de la escolaridad. En el caso de la multiplicación y la división hay significados que los docentes reconocen trabajar con mayor frecuencia. Sin embargo, a partir de los resultados de las investigaciones en el campo de la Didáctica de la Matemática, es posible afirmar que para la construcción del sentido de cada operación se debe transitar por sus **diferentes significados**.

- Los distintos significados se materializan en problemas aditivos y multiplicativos. Presentar variedad de ellos es otro aspecto a considerar en la planificación de la enseñanza de las operaciones. Al hablar de **variedad de problemas**, nos referimos a situaciones en las que la presentación de los datos y la forma en que estos se relacionan determinan la posibilidad de cambios en el lugar de la incógnita. Esto genera problemas de diferente grado de dificultad.
- En consecuencia, la dificultad de los problemas no está ni en el dominio numérico elegido ni en el tipo de operación involucrada, sino en la **forma en que se relacionan los datos** (cálculo relacional). Esto amerita trabajar todas las operaciones desde Inicial a Sexto grado, a través de diferentes situaciones de uso.
- La responsabilidad de la enseñanza de las operaciones no es exclusiva de los maestros del primer nivel, sino que radica **en todos los niveles de la escolaridad**. Cada uno de ellos debe aportar nuevos aspectos, miradas más profundas, miradas más abarcativas. Todo esto exige la realización de acuerdos institucionales que establezcan responsabilidades claras y que permitan evidenciar un trabajo sistemático fuertemente basado en el enriquecimiento de las relaciones entre las operaciones. La expresión *"En el primer nivel existe una preponderancia de los problemas aditivos sobre los multiplicativos"* debe pasar a ser un recuerdo de tiempos pasados.

La Didáctica de la Matemática nos aporta un marco teórico que "hace caer" arraigadas creencias. Sin duda, esto puede desestabilizar y generar incertidumbre. En ese momento se hace más necesaria la participación del colectivo docente como grupo profesional que toma decisiones fundamentadas en saberes pedagógicos y didácticos. La lectura crítica de nuevos materiales bibliográficos y su discusión institucional, la formación permanente, el intercambio de argumentos sobre las prácticas de enseñanza entre colegas, se constituyen en ricas instancias de crecimiento profesional que redundan en una enseñanza reflexiva y formativa.

Bibliografía consultada

ÁVILA, Alicia (1995): "Problemas fáciles, problemas difíciles" en D. Block Sevilla (coord.): *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Lecturas*. México: SEP/PRONAP.

BLOCK, David; DÁVILA, Martha (1995): "La matemática expulsada de la escuela" en D. Block Sevilla (coord.): *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Lecturas*. México: SEP/PRONAP.

CARRETERO DE OLEZA, Luz (1989): "La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas por el niño de 8 a 11 años" en *Anuario de Psicología*, Nº 42. En línea: http://www.raco.cat/index.php/anuariopsicologia/article/viewFile/64609/88635

CASTRO MARTÍNEZ, Enrique (1991): *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

CLARK, Eve V. (1973): "Non-linguistic strategies and the acquisition of word meanings" en *Cognition*, Vol. 2, Nº 2, pp. 161-182.

DESCAVES, Alain (1992): *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*. París: Hachette Éducation.

RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz (2005): "De las operaciones... ¿qué podemos enseñar?" en B. Rodríguez Rava; M. A. Xavier de Mello (comps.): *El Quehacer Matemático en la Escuela. Construcción colectiva de docentes uruguayos*, pp. 130-150. Montevideo: FUM-TEP/Fondo Editorial QUEDUCA.

RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz; SILVA PALUMBO, Alicia (2005): "La apropiación de las operaciones matemáticas: contextos y significados" en B. Rodríguez Rava; M. A. Xavier de Mello (comps.): *El Quehacer Matemático en la Escuela. Construcción colectiva de docentes uruguayos*, pp. 151-154. Montevideo: FUM-TEP/Fondo Editorial QUEDUCA.

STERN, Elsbeth (1993): "What Makes Certain Arithmetic Word Problems Involving the Comparison of Sets so Difficult for Children" en *Journal of Educational Psychology*, Vol. 85, Nº 1, pp. 7-23. En línea: http://www.ifvll.ethz.ch/people/sterne/A11_What_makes_certain_arithmetic_word_problems_involving_the_comparison_of_sets_so_hard_for_children_1993.pdf

VERGNAUD, Gérard (1990): "La teoría de los campos conceptuales" en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3. Grenoble: La Pensée Sauvage. Traducción de Juan D. Godino.

VERGNAUD, Gérard (1991): *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Ed. Trillas.

VERSCHAFFEL, Lieven; DE CORTE, Erik (1996): "Number and Arithmetic" (Cap. 3) en A. J. Bishop y otros (eds.): *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 99-138. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.