

Lugar geo

Problematizar, explorar y construir en la

• **María José Castro** | Maestra.
Isabel Elvas | Profesora de Matemática. Formadora de Matemática en el IFS.
Integrantes del Equipo de Investigación en Enseñanza de la Matemática, revista QUEHACER EDUCATIVO.

A modo de introducción: la importancia de trabajar lugar geométrico en la escuela

Nuestro interés surge a partir de querer abordar verdaderos problemas geométricos en la escuela, que les permitan a los alumnos construir conocimiento geométrico. Es necesario remarcar la diferencia entre la clásica denominación de figuras y sus respectivas propiedades, y establecer problemas que conduzcan a la construcción de una conjetura que intenta vincular características similares de los puntos pertenecientes a las figuras. En este sentido, el docente se ubica como mediador y facilitador en la elaboración de las conjeturas de los alumnos y sus correspondientes explicaciones, para luego poder llegar a una generalización y posterior institucionalización del conocimiento.

En atención a esta inquietud consideramos que el abordaje de los conceptos geométricos desde la mirada del lugar geométrico es una estrategia de enseñanza que permite el desarrollo de estas competencias (conjeturar, explicar, generalizar).

En consonancia con el pensamiento de Itzcovich (2005), nuestro interés será el planteo de las construcciones en Geometría como actividades adecuadas para promover la exploración que permita conjeturar propiedades, diferenciándolo de los procedimientos mecánicos, de las clásicas construcciones como “final de proceso”.

En el programa escolar vigente se «propone un enfoque didáctico que enfatice la construcción de significados a través de la problematización del conocimiento geométrico» (ANEP. CEP, 2009:66). En este artículo haremos hincapié en los procesos de construcción del aprendizaje desarrollado por los niños a partir de los aportes de la exploración, de la construcción de la figura de análisis, de la argumentación y la validación.

Nos aproximamos al concepto de lugar geométrico

«Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que cumplen con cierta propiedad y que determinan una figura. Ante el análisis de un problema en el cual L es el conjunto de los puntos que cumplen una propiedad y se encuentran ubicados en una figura F , debemos probar que:

- 1) todo punto que cumple la propiedad pertenece a la figura, (...), que llamaremos teorema directo*
 - 2) todo punto de la figura tiene la propiedad indicada, (...), que llamaremos teorema recíproco.»*
- (Fernández Val, 2013:112)

Definir un objeto geométrico como “lugar geométrico” hace referencia a una figura, a un conjunto de puntos dado por comprensión, es decir, a aquel conjunto de elementos que son los únicos que cumplen con esa propiedad.

métrico

enseñanza de la Geometría

Los lugares geométricos más antiguos conocidos y utilizados por la humanidad son, en primer lugar, la recta y le sigue el círculo (del Río, 1996) y estos hoy, junto a otros como la circunferencia, la mediatriz y la bisectriz, están presentes en el programa escolar vigente, si bien la lista de lugares geométricos, tanto del plano como del espacio, es mucho más amplia.

La inclusión en este artículo de la terminología “lugar geométrico” así como de su definición tiene la intención de aportar elementos al docente. No consideramos pertinente su traslado a los alumnos escolares.

La exploración para resolver problemas en Geometría

Partimos del enfoque de resolver problemas en Matemática, para llegar a la resolución de problemas en Geometría. La propuesta de resolver situaciones para que los niños puedan desarrollar conocimiento se contrapone al enfoque didáctico arraigado en la escuela de que los problemas se proponen para aplicar conocimientos enseñados con anterioridad. Las situaciones deben promover actividades de búsqueda que pongan en juego los conocimientos ya construidos por el alumno adaptándolos como herramientas de solución para cada nueva situación, y que a través de ellas pueda construir otros conocimientos (cf. Quaranta y Wolman, 2003).

La resolución de problemas supone que los alumnos poseen conocimientos previos con los que abordar la nueva situación; valora positivamente los conocimientos incompletos, precarios, que pueden conducir a afirmaciones falsas durante el proceso de construcción de sus saberes (Block, Dávila y Martínez, 1995). De este modo y de acuerdo a la Teoría de las situaciones didácticas, el rol de maestro va más allá de proponer el problema, le corresponde la “institucionalización” del conocimiento, la importancia que tiene en el proceso de enseñanza arribar a conocimientos formales y explícitos reconocidos por la cultura del momento (cf. Brousseau, 1998).

Nuestro trabajo se sustenta en la siguiente interrogante: ¿Cómo trascender el trabajo meramente perceptivo o visual en el abordaje de la Geometría? A partir de aquí podemos desarrollar un marco teórico que dé soporte a la noción de que la exploración empírica posibilita la elaboración de conjeturas por parte de los alumnos. Esto implica que los alumnos se involucren en el proceso de aprendizaje, se apropien de las propiedades geométricas en cuestión y construyan el nuevo concepto, es decir, que logren «inferir a partir de los datos y con el apoyo de las propiedades, relaciones que no están explicitadas en el enunciado y que llevarán a establecer el carácter necesario de los resultados de manera independiente de la experimentación» (Sadovsky et al., 1998:9).

Barallobres *et al.* (2002), citados por Itzcovich (2005:13), plantean que proponer un problema geométrico implica:

- ▶ que las propiedades de los objetos geométricos se pongan en juego para resolver el problema;
- ▶ la interacción del alumno con objetos que pertenecen a un espacio conceptualizado, no ya al físico, es decir, las figuras trazadas lo representan;
- ▶ que las representaciones no permiten arribar a la respuesta por simple constatación sensorial;
- ▶ que la decisión autónoma del niño sobre la verdad o falsedad de su respuesta se fundamenta en las propiedades de los objetos geométricos, dando lugar a la validación de la misma.

Para la resolución de problemas geométricos, en nuestro caso sobre lugares geométricos, consideramos que adquiere relevancia el trabajo con la figura de análisis. Esta permite visualizar los datos del problema y relacionarlos, habilitando la construcción de los posibles caminos de resolución.

«...analizar los datos con los que se debe construir una figura, determinar si la construcción es posible o no, establecer relaciones entre los datos conocidos y el dibujo, etc., resultan una experiencia sumamente útil en el camino hacia entender a una figura como el conjunto de relaciones que la caracterizan y que pueden ser enunciadas en un texto. (...) En este sentido, la presencia de una figura de análisis comienza a ser un referente importante.» (Itzcovich, 2005:14)

Esta figura de análisis posibilita establecer relaciones entre los datos del problema y las características de la figura, para luego poder construir argumentos sobre las respuestas obtenidas. De este modo, la percepción irá de la mano con la cognición, permitiendo establecer relaciones entre ambas, trascendiendo el nivel intuitivo que brinda la figura de análisis. Resulta indispensable entonces que *«las situaciones que se propongan a los alumnos con la finalidad de indagar, identificar o reconocer propiedades de las figuras deben impactar en procesos intelectuales que permitan hacer explícitas las características y propiedades de los objetos geométricos»* (idem, p. 18).

A partir de lo expuesto anteriormente, la figura de análisis en la resolución de los problemas geométricos habilita el despliegue de los conocimientos que posee el niño sobre la figura en cuestión, permite su

vinculación con los datos del problema y el establecimiento de relaciones que conducen a la argumentación; de este modo, se convierten en verdaderas herramientas para el aprendizaje. Así: *«Los alumnos deben aprender a ver. Pero el ver está condicionado por el conocer: se ve en función de lo que se conoce»* (idem, p. 52). De allí emerge la necesidad de poseer conocimientos sobre las propiedades y características de las figuras para poder visualizar nuevas relaciones y elaborar argumentaciones.

La enseñanza y el aprendizaje de la Matemática no solo de la Geometría, están basados en la resolución y reflexión en torno a problemas. En el momento de la reflexión sobre los procedimientos realizados y los conocimientos involucrados son cruciales los intercambios entre pares y con el docente. Las instancias de intercambio, debate, explicitación y justificación entre los alumnos constituyen un factor beneficioso en el progreso del aprendizaje, donde la participación del docente es altamente determinante (cf. Quaranta y Wolman, 2003). Por tanto creemos relevante la planificación de este momento de trabajo en el aula, al que llamamos puesta en común.

Un último aspecto a desarrollar es la validación; para ello atendemos el planteo que hace Panizza (2003) con referencia a la Teoría de las situaciones didácticas en cuanto a que en todo proceso de aprendizaje hay tres tipos de situaciones: de acción, donde *«el alumno debe actuar sobre un medio»*; de formulación, donde un alumno o un grupo *«debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno»* (idem, p. 66); y de validación, donde dos alumnos o un grupo elaboran afirmaciones que serán sometidas a la revisión por otros alumnos. Nos preguntamos, cuándo sucede la instancia de validación, es decir, cuándo el alumno tiene la información suficiente para juzgar si su respuesta es adecuada o no. En las tres situaciones puede haber validación: *«En las situaciones de acción se validan acciones; en las situaciones de formulación se validan mensajes; en las situaciones de validación se validan afirmaciones»* (idem, p. 68).

Si bien es importante que el enunciado elaborado para responder a la situación que se plantea debe ser examinado atendiendo sus limitantes de acuerdo a las condicionantes del problema, es necesario ir haciendo las aproximaciones que surjan de los aportes y las expresiones de los alumnos. La intención de la validación de un lugar geométrico es determinar, con los argumentos correspondientes, qué puntos

del plano cumplen con la condición explicitada en el problema y cuáles no. Este es un aspecto relevante en la enseñanza de la Geometría, debemos enseñar a verificar las soluciones y contribuir a la determinación de las limitantes del enunciado o de la respuesta.

A modo de síntesis, en todo este proceso juega un papel importante la intervención del docente, ya que deberá planificar estratégicamente su labor de acuerdo a la evolución de los alumnos en la resolución del problema. Esta instancia, ya sea en forma individual o en pequeños grupos, requiere que el docente se encuentre atento al proceso que realizan los alumnos, de manera de poder decidir en qué momento intervenir y cómo hacerlo para posibilitar el avance de ellos hacia la construcción del concepto y las argumentaciones correspondientes. Esto le permitirá planificar el desarrollo de la puesta en común, ordenar las intervenciones de los alumnos y las suyas para promover el intercambio entre pares y llegar a registrar algunas conclusiones, ya sean parciales o finales, de acuerdo al avance del grupo.

El espacio como variable didáctica

Un concepto central en la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau es el de variable didáctica, es decir, características de la situación planteada, que el docente puede variar con el fin de modificar el conocimiento a construir y, en consecuencia, las estrategias posibles de resolución (cf. Panizza, 2003). Una de las variables didácticas que tiene su origen en esta teoría es el estudio del tamaño del espacio, que el docente debe tener en cuenta al momento de planificar su propuesta de trabajo.

Se identifican tres dimensiones: macroespacio, mesoespacio y microespacio. Estas posibilitan generar distintas relaciones del alumno con los objetos que pertenecen a esa porción del espacio y, por lo tanto, conllevan distintos modelos conceptuales, «...según el “tamaño del espacio” con el cual interactúa el sujeto, se ponen en funcionamiento modelos conceptuales diferentes para realizar representaciones gráficas de ese espacio» (Itzcovich, 2008:176).

El macroespacio hace referencia a una porción del espacio tal que no puede obtenerse una imagen total de él sin desplazarse o puede obtenerse mediante representaciones sucesivas. Es decir, la percepción directa de la totalidad del espacio es inaccesible. Un ejemplo de esta dimensión sería el espacio urbano o el rural.

El mesoespacio, en cambio, hace referencia a un recorte del espacio que resulta accesible a una visión global desde una misma posición. «Se puede decir que el mesoespacio es el espacio de los desplazamientos del sujeto» (idem, p. 179).

El sector del espacio más próximo al sujeto es el microespacio, que contiene objetos accesibles con la visión y la manipulación. El sujeto puede establecer cualquier perspectiva del objeto. Resulta relevante expresar que estas tres dimensiones del espacio deben trabajarse en forma conjunta, ya que «no podría afirmarse que uno de los tamaños del espacio se domina “antes” que otro. Es decir, no se trata de “niveles de adquisición”...» (idem, p. 182).

De acuerdo a lo anterior, a continuación desarrollaremos una serie de propuestas didácticas que toman en cuenta estas tres dimensiones. El docente es quien debe proponer una secuenciación de problemas que habiliten el trabajo con los distintos tamaños del espacio, de manera de promover el desarrollo de aprendizajes significativos en cuanto a la adquisición de estos conceptos. A modo de ejemplo se proponen problemas geométricos que pueden ser modificados en su planteo, si se introduce el tamaño del espacio como variable didáctica.

Acercarnos al programa escolar

Después de haber presentado el concepto de lugar geométrico y la importancia de la exploración en la enseñanza de la Geometría, analizando el programa escolar vigente encontramos algunos contenidos vinculados a lugares geométricos para trabajar en la escuela:

- Tercer grado
 - La circunferencia y el círculo.
 - Las posiciones relativas de rectas en el plano. (ANEP. CEP, 2009:319)
- Cuarto grado
 - Los elementos geométricos de la circunferencia: centro, radio, diámetro y cuerda.
 - Las paralelas medias en los paralelogramos. (idem, p. 333)
- Quinto grado
 - La circunferencia y el círculo como lugar geométrico. (idem, p. 347)
- Sexto grado
 - La construcción de la mediatriz y la bisectriz. (idem, p. 363)

Propuestas para el aula

De acuerdo a los contenidos programáticos detallados anteriormente, nos focalizaremos en presentar una serie de propuestas de elaboración propia que contribuyan al abordaje y a la secuenciación de los mismos para el trabajo en el aula. Además, luego de haber hecho un recorrido por dos de los Cuadernos para hacer Matemática del Consejo de Educación Inicial y Primaria, seleccionamos algunas propuestas con la intención de compartir posibles caminos de abordaje en la enseñanza de algunos de los lugares geométricos ya mencionados.

El objetivo con estas propuestas es promover la exploración, la formulación y la validación en la construcción conceptual de los diferentes contenidos programáticos desde el punto de vista de los lugares geométricos. De esta manera se presentan ejemplos de problemas geométricos que contribuyen al abordaje que el docente puede hacer de estos conceptos como lugares geométricos, de acuerdo a los contenidos del programa del grado con el que trabaja.

También se quiere mostrar el potencial que ofrece Geogebra como herramienta para la resolución de problemas de Geometría, en particular para favorecer la conceptualización de los lugares geométricos que aparecen en el programa escolar.

Posibles propuestas para tercer y cuarto grado

Contenido: Círculo y circunferencia.

Recorte: Circunferencia como lugar geométrico.

Propósito: Promover la construcción del concepto de circunferencia como lugar geométrico.

Problemas

Fiesta de fin de curso

Para la fiesta de fin de curso es necesario organizar los grupos de manera que todos los compañeros queden a la misma distancia de uno que se encuentra en un lugar fijo, ¿es posible organizar el grupo de esta manera?, ¿cómo quedarían ubicados?

Para hacer el análisis, vamos a llamarle Juan al alumno que está en un lugar fijo.

Posibles procedimientos que pueden surgir	Posibles intervenciones del maestro
No se puede.	¿Por qué no pueden? ¿Y con esta piola podrán?
Todos los niños se colocan en línea recta respecto a Juan, quedando Juan fuera de la línea.	¿Cuál es la condición que pide el problema? ¿Todos la cumplen? ¿Están todos a la misma distancia de Juan?
Forman un cuadrado.	¿Todos están a la misma distancia? ¿Cómo podemos verificarlo? Si no surge una estrategia para medir, el docente puede habilitar algún instrumento de medida y de registro porque seguramente encuentren cuatro que estén a igual distancia, por ejemplo, los vértices.
Se ubican solo cuatro niños a igual distancia de Juan.	¿Y los demás? ¿Dónde los pueden ubicar?
Se ubican todos los niños a igual distancia de Juan.	Si quisiera agregar más niños, ¿dónde los pondría? ¿Cuántos más puedo agregar? Si identificamos los niños con cruces en el suelo, ¿cuántos más puedo agregar?

En este problema, el ámbito de resolución incluye al niño; por lo tanto, se desarrolla en el mesoespacio. Una variable didáctica que se puede introducir es cambiar el ámbito y plantearlo en el microespacio, como puede ser la hoja.

A continuación presentamos un problema similar, en el que se puede utilizar una representación en el microespacio.

Sombra en la estancia

En una estancia se quieren plantar tres árboles a igual distancia de la casa para que den sombra, ¿es posible hacerlo?, ¿en qué lugares los podrían plantar?

La búsqueda del tesoro¹

Guazubirá y Zorrito están buscando la zona en la que puede estar escondido un tesoro. Les dieron pistas y un plano con un punto marcado que se llama P. En el plano que sigue, marca la zona donde Guazubirá puede encontrar el tesoro.
¿Todos marcaron la misma zona?

¹ Fuente: ANEP. CEIP. CACEEM (2016:64)



Imagen 1

En esta propuesta se plantea la búsqueda de un punto que esté a 4 cm de distancia del punto marcado en el mapa.

Posibles procedimientos que pueden surgir	Posibles intervenciones del maestro
Marcan individualmente el ancla, la palmera o la calavera.	Lee la consigna. ¿Cuál es la condición que plantea el problema?
Señalan un punto cualquiera en el plano que se encuentre a 4 cm de P.	¿Es el único? ¿Podrás encontrar otro? ¿Todos los de tu grupo encontraron el mismo punto que tú?
Ubican varios puntos a 4 cm de P.	¿Solo esos puntos cumplen con la condición? ¿Habrán más?
Encuentran muchos puntos, los unen y trazan la circunferencia a mano alzada.	¿Por qué a partir de todos esos puntos pudieron construir esa figura? ¿Habrán más?

Posible intervención docente para la puesta en común:

- En esa instancia se puede problematizar acerca de por qué todos señalaron puntos diferentes en el mapa. Entonces, ¿dónde está el tesoro?
- ¿En cuántos lugares encontraron que puede estar el tesoro?
- ¿Puedo encontrar más? ¿Cuántos más?
- ¿Qué forman todos esos puntos que encontraron?

Contenido: Círculo y circunferencia.

Recorte: Círculo como lugar geométrico.

Propósito: Promover la construcción del concepto de círculo como lugar geométrico.

Problemas

La huerta

En la huerta de la escuela se quieren plantar lechugas a 2 m como máximo del árbol. ¿Dónde ubicarías la plantación?

En este problema, la expresión “2 m como máximo del árbol” presenta una diferencia con los problemas anteriores, ya que refiere a una zona y no a una línea.

La búsqueda del tesoro²

En el plano que sigue, marca la zona donde Zorrito puede encontrar el tesoro.

¿Todos marcaron la misma zona para encontrar el tesoro? ¿En qué se diferencian las zonas que marcaron Guazubirá y Zorrito?



Imagen 2

En este problema que hace referencia al círculo, la intervención del docente podría ser similar a la de “La búsqueda del tesoro” para circunferencia, incluyendo en la problematización todos los puntos interiores a la circunferencia.

² Fuente: ANEP. CEIP. CACEEM (2016:65)

Una posible variable didáctica, atendiendo la dimensión del espacio, sería proponer su resolución en el patio de la escuela, pasando a trabajar en el mesoespacio. De esta manera, el docente puede habilitar recursos como cuerda, tiza, banda de papel, cinta y otros.

Contenido: Posiciones relativas de las rectas en el plano.

Recorte: Rectas paralelas.

Propósito: Aproximar al niño al concepto de rectas paralelas.

Problema

El alumbrado

Se quiere alumbrar la calle de la escuela colocando los focos a 1 m del cordón. ¿En qué lugar los ubicarías?

Posibles propuestas para quinto grado

Contenido: La circunferencia y el círculo como lugar geométrico.

Recorte: Círculo como lugar geométrico.

Propósito: Conceptualizar el círculo como un lugar geométrico.

Problema

Campaña de vacunación

En abril llega el vacunatorio móvil a la plaza del barrio y tiene como cometido inmunizar a los vecinos que se encuentran alejados, como máximo a treinta cuerdas de distancia. ¿En qué zona se encuentran las viviendas que se atenderán en este móvil?

Contenido: La circunferencia y el círculo como lugar geométrico.

Recorte: La circunferencia como lugar geométrico.

Propósito: Promover la conceptualización de la circunferencia como lugar geométrico.

Problema

Energías renovables

Se quieren ubicar tres molinos de viento a igual distancia de la ciudad. ¿Cuáles serían los posibles lugares que ocuparían?

Posibles propuestas para sexto grado

Contenido: La construcción de la mediatriz y la bisectriz.

Recorte: La construcción de la mediatriz.

Propósito: Propiciar la construcción del concepto de mediatriz como lugar geométrico.

Problema

Antigüedades

En un museo se exhiben dos joyas de gran valor. Para protegerlas se quieren colocar dos cámaras de vigilancia a igual distancia de ambas. ¿Cuáles serían los lugares posibles para ubicar las cámaras?

Con la intención de introducir una nueva herramienta para la resolución de este problema, proponemos el trabajo con Geogebra que posibilita su representación en el microespacio y la exploración de puntos del plano que cumplan con la condición que se les solicita. Habilita un nuevo camino hacia la problematización y reflexión acerca de todos los puntos que satisfacen la condición; en nuestro caso, la mediatriz del segmento que tiene por extremos la ubicación de las dos joyas.

Para trabajar con Geogebra se habilitan las siguientes funciones: punto, punto medio, segmento, distancia o longitud, recta, circunferencia y mediatriz. A continuación se presenta una secuencia de trabajo que un grupo de alumnos podría llegar a transitar.

- Ubican los puntos A y B que representan las joyas (Imagen 3).
- Encuentran el punto medio C entre las dos joyas (Imagen 4).
- Reconocen otro punto D (Imagen 5) que cumple con la condición, equidista de ambas joyas.
- Continúan agregando los puntos E, F y G que cumplen con la condición (Imagen 6).
- Trazan la recta que incluye los puntos D, E, F y G (Imagen 7).

A posteriori, el docente podrá guiar a los alumnos a usar la función mediatriz del segmento AB y constatar que coincide con la recta antes trazada (Imagen 8).

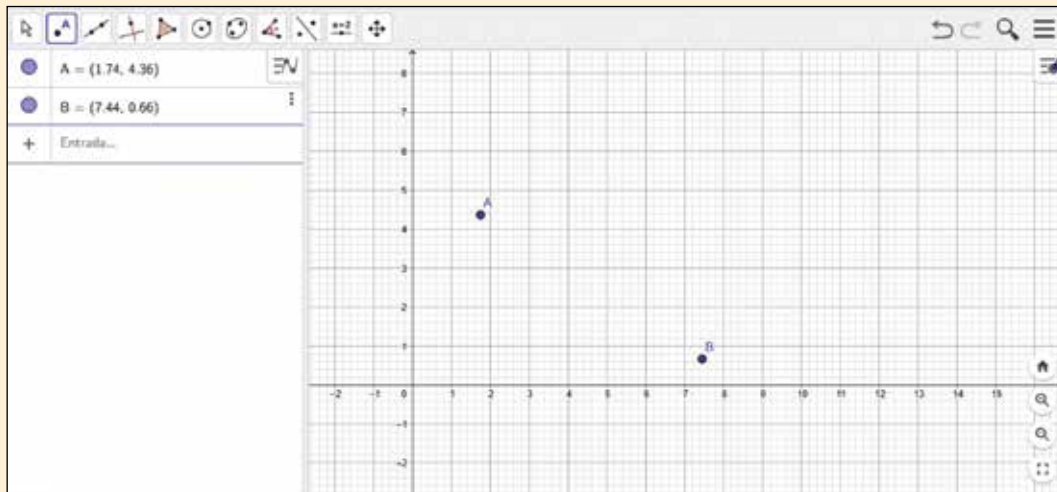


Imagen 3 - Elaboración propia

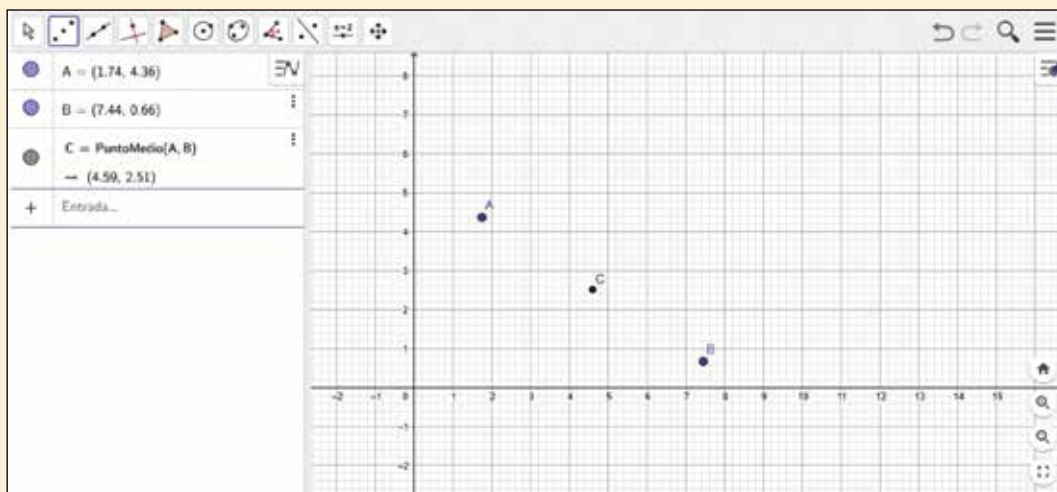


Imagen 4 - Elaboración propia

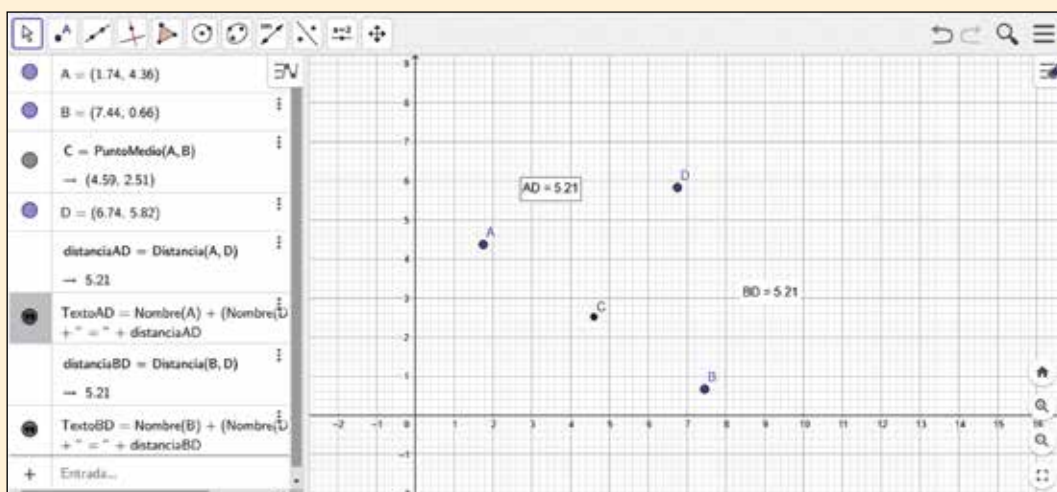


Imagen 5 - Elaboración propia

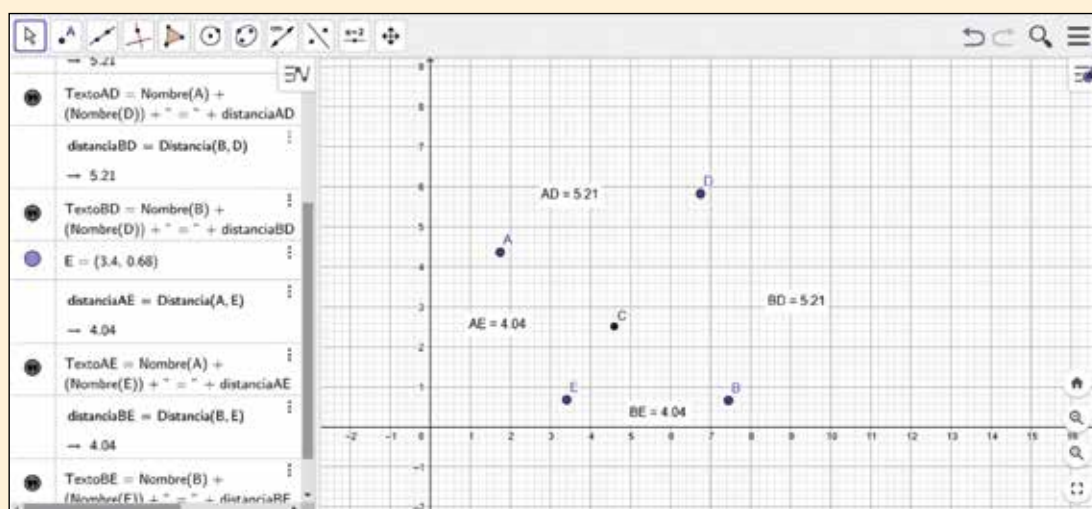


Imagen 6 - Elaboración propia

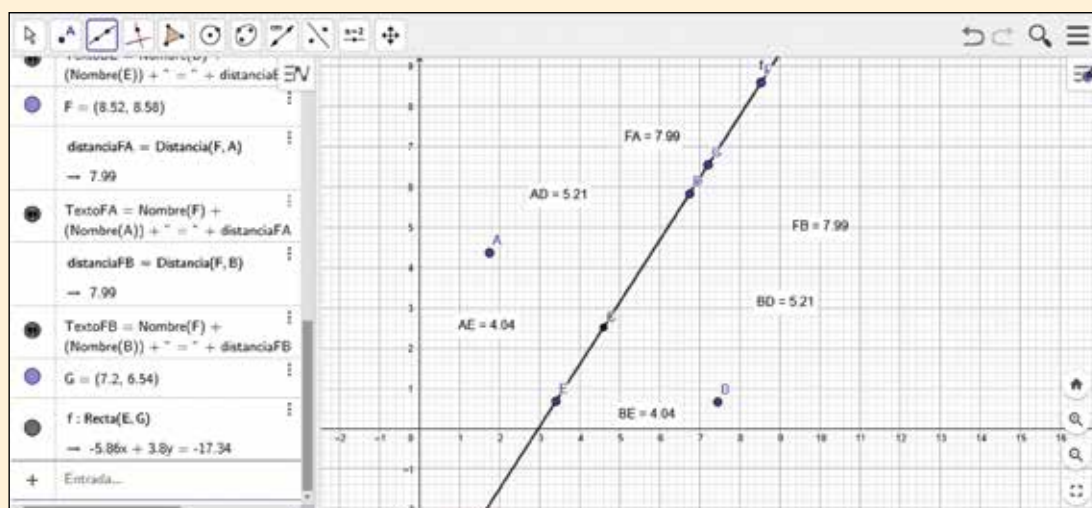


Imagen 7 - Elaboración propia

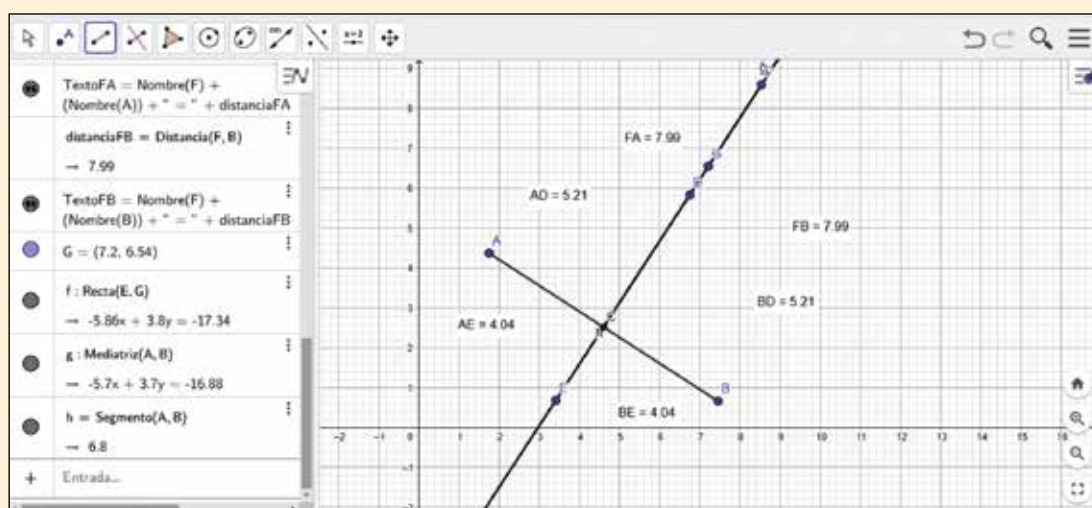


Imagen 8 - Elaboración propia

De esta manera, de acuerdo a lo expresado por Itzcovich (2005), la exploración posibilita visualizar que los puntos se encuentran alineados. El trabajo de la mediatriz en Geogebra resulta interesante, ya que habilita a los alumnos a explorar y logran construir la recta en la que se ubican todos los puntos que cumplen con la condición dada en el problema. De este modo, el docente tiene la posibilidad de abordar el concepto de la mediatriz como lugar geométrico y trabajar sobre la verificación de la respuesta a través de la función “mediatriz”.

Problemas

En Matemática

¿Es posible trazar una circunferencia que pase por los vértices de un triángulo equilátero? ¿Cómo lo harías? ¿Y si fuera un triángulo escaleno? ¿Sería posible?

Este es otro problema que permitiría realizar potentes exploraciones y poner en juego diversos conocimientos de los alumnos.

Energías renovables

Fueron ubicados tres molinos de viento a igual distancia de una ciudad para abastecerla de energía eléctrica. ¿Dónde se encuentra la ciudad?

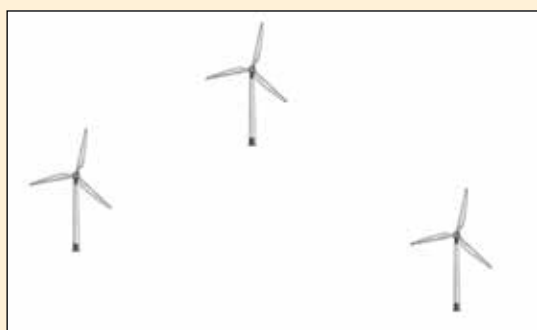


Imagen 9 - Elaboración propia

En este problema se busca hacer énfasis en la figura de análisis como herramienta potente en la resolución de problemas geométricos. Para ello se presenta el siguiente ejemplo.

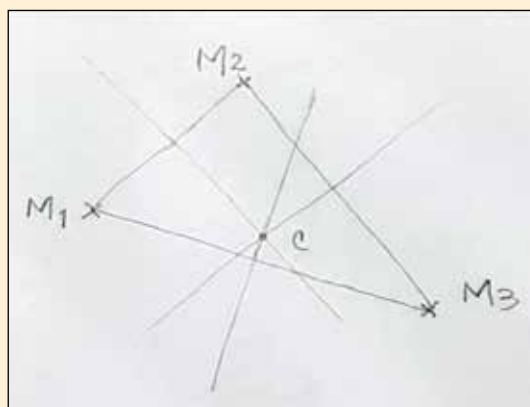


Figura de análisis - Elaboración propia

La figura de análisis permite la representación en el microespacio de la hoja –donde los molinos son los puntos M_1 , M_2 , M_3 y la ciudad el punto C – y la exploración de posibles caminos de resolución. En ella se organizan los datos del problema y se viabiliza la activación de los conocimientos de los niños, que les servirán como anclaje para la asimilación del nuevo concepto en cuestión, *circuncentro*, punto de intersección de las mediatrices. Creemos conveniente señalar que a efectos de que la figura de análisis sea una herramienta accesible para el alumno en la resolución de problemas geométricos, ello requiere de su enseñanza por parte del docente.

Problemas

Búsqueda del tesoro³

Ubica en el mapa el lugar del tesoro. Escribe cómo procediste para ubicarlo.



Imagen 10

³ Fuente: ANEP. CEIP. CACEEM (2017:12)

Es de nuestro interés comparar esta actividad con “La búsqueda del tesoro” propuesta en el *Cuaderno para hacer Matemática en Tercero* (ANEP. CEIP. CACEEM, 2016). En aquella propuesta, la solución al problema es el lugar geométrico en cuestión, por tanto es un conjunto infinito de puntos. En la propuesta de sexto, el lugar geométrico utilizado es la mediación para llegar a la solución, el único punto del plano que cumple con las dos condiciones en forma simultánea. En este caso, el concepto empleado es la mediatriz, pero como el tesoro debe equidistar de tres puntos (la choza, la roca y la palmera), la solución consiste en la intersección de, por lo menos, dos de las mediatrices. Surge así la necesidad de explorar los puntos que cumplen con ambas condiciones simultáneamente, lo cual valida la existencia de un único punto T como solución.

Puntos con condiciones⁴

Se deben marcar los puntos indicados para determinar el lugar del tesoro.

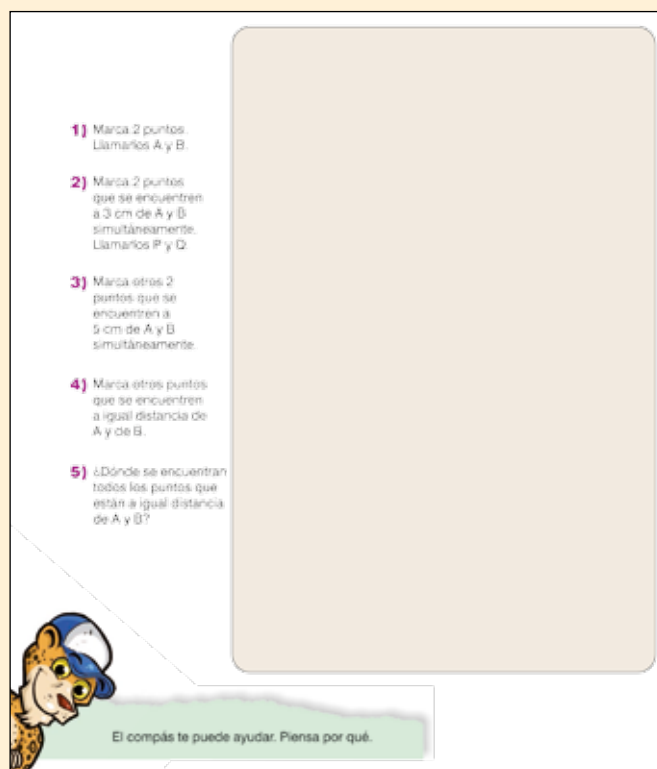


Imagen 11

Contenido: La construcción de la mediatriz y la bisectriz.

Recorte: La construcción de la bisectriz.

Propósito: Propiciar la construcción del concepto de bisectriz como lugar geométrico.

Problema

Iluminación en el campo

En el campo se quieren iluminar dos caminos que se cortan y para ahorrar tendido eléctrico los focos se piensan ubicar a igual distancia de los dos caminos. ¿Dónde los ubicarías?

Es interesante poder presentar distintos problemas que permitan la aproximación en este caso al concepto de bisectriz, variando el tamaño del espacio, los recursos habilitados, etcétera.

Reflexiones finales

En el recorrido realizado durante la elaboración del artículo abordamos aspectos importantes acerca de la enseñanza de la Matemática en general y de la Geometría en particular, profundizamos en la exploración como un camino que permite problematizar la enseñanza de los conceptos que admiten su trabajo como lugares geométricos y destacamos la función que cumple el docente en la promoción de la argumentación, la explicación y la validación en aras de la construcción de aprendizajes significativos.

Las propuestas presentadas están acompañadas de algunas sugerencias para su desarrollo en el aula, así como los recursos que se pueden o no habilitar y la construcción de la figura de análisis como estrategia de resolución a ser enseñada por los docentes. También señalamos el tamaño del espacio como una de las variables didácticas que promueven la problematización del trabajo en Geometría. Todo esto tiene la intención de introducir elementos a considerar para la elaboración de una secuencia de trabajo sustentada en la exploración como estrategia que promueve la construcción del conocimiento por parte del alumno.

Se analizaron las posibilidades que brinda una herramienta tecnológica como Geogebra para el trabajo en el aula desde el microespacio y como medio de representación del mesoespacio y del macroespacio. Consideramos que algunas de las estrategias mencionadas no son de uso exclusivo para el trabajo

⁴ Fuente: ANEP. CEIP. CACEEM (2017:13)

con lugar geométrico, sino que pueden ser utilizadas para el abordaje de otros contenidos programáticos.

A la luz de lo compartido hasta ahora surgen algunas interrogantes: ¿Cómo elaborar secuencias adecuadas para trabajar el conocimiento que se quiere enseñar? A la hora de planificar, ¿es de utilidad anticipar las posibles estrategias de resolución de los niños? ¿Cuál es el lugar del docente mientras los alumnos trabajan en equipo? ¿Cómo interviene el docente para promover la participación y recoger los aportes de los niños? ¿Qué lugar tiene el niño en la validación de los conocimientos en la puesta en común? ¿Es posible cerrar una clase con la definición parcial de un concepto?

A modo de conclusión, el desafío de elaborar el artículo nos enfrentó en primer lugar a reflexionar sobre nuestras prácticas de enseñanza, sobre cómo entendemos la enseñanza de la Geometría en el período escolar. Investigamos autores para construir el marco teórico que sustenta nuestro objetivo, propusimos alternativas de trabajo en el aula y de esta manera avanzamos hacia el modelo que pretendemos construir. Pero constatamos que este modelo va cambiando en la medida en que lo ponemos en práctica, reflexionamos y lo evaluamos para retroalimentar las prácticas de enseñanza. De esto se trata el camino de nuestra profesión docente, nos encontramos en constante construcción. 

Referencias bibliográficas

ANEP. CEIP. CACEEM. República Oriental del Uruguay (2016): *Cuaderno para hacer Matemática en Tercero*. En línea: http://www.ceip.edu.uy/documentos/2017/bibliotecaweb/matematica_tercero.pdf

ANEP. CEIP. CACEEM. República Oriental del Uruguay (2017): *Cuaderno para hacer Matemática en Sexto*. En línea: http://www.ceip.edu.uy/documentos/2018/bibliotecaweb/matematica_sexta.pdf

ANEP. CEP. República Oriental del Uruguay (2009): *Programa de Educación Inicial y Primaria. Año 2008*. En línea (Tercera edición, año 2013): http://www.ceip.edu.uy/documentos/normativa/programaescolar/ProgramaEscolar_14-6.pdf

BARALLOBRES, Gustavo; FIORITI, Gema; ITZCOVICH, Horacio; SESSA, Carmen (2002): *Desarrollo curricular en Geometría: una experiencia en 1er. y 2do. año*. Documento Interno. Buenos Aires: Dirección de Currícula, Secretaría de Educación.

BLOCK S., David; DÁVILA V., Martha; MARTÍNEZ F., Patricia (1995): "La resolución de problemas: Una experiencia de formación de maestros" en *Educación Matemática*, Vol. 7, N° 3, pp. 5-26. En línea: <https://core.ac.uk/download/pdf/154338895.pdf>

BROUSSEAU, Guy (1998): *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

DEL RÍO SÁNCHEZ, José (1996): *Lugares geométricos. Cónicas*. Madrid: Ed. Síntesis.

FERNÁNDEZ VAL, Walter (2013): *Geometría métrica. Plano y espacio*. Montevideo: Kapelusz.

GONZÁLEZ CABILLÓN, Julio; LOIS, Leonardo (1995): *Matemática 4º*. Montevideo: Ediciones de la Plaza.

ITZCOVICH, Horacio (2005): *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

ITZCOVICH, Horacio (2008): "Acerca de la enseñanza de la Geometría" (Cap 6) en H. Itzcovich (coord.): *La Matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor. Colección: Carrera Docente. Serie: El abecé de...

PANIZZA, Mabel (2003): "Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas" (Cap. 2) en M. Panizza (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*, pp. 59-71. Buenos Aires: Ed. Paidós.

QUARANTA, María Emilia; WOLMAN, Susana (2003): "Discusiones en las clases de matemática. Qué, para qué y cómo se discute" (Cap. 6) en M. Panizza (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*, pp. 189-242. Buenos Aires: Ed. Paidós.

SADOVSKY, Patricia; PARRA, Cecilia; ITZCOVICH, Horacio; BROITMAN, Claudia (1998): *Matemática. Documento de trabajo N° 5. La enseñanza de la Geometría en el segundo ciclo*. Buenos Aires: Dirección de Currícula. Dirección General de Planeamiento. Subsecretaría de Educación. Secretaría de Educación. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. En línea: <http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matemat/doc5.pdf>