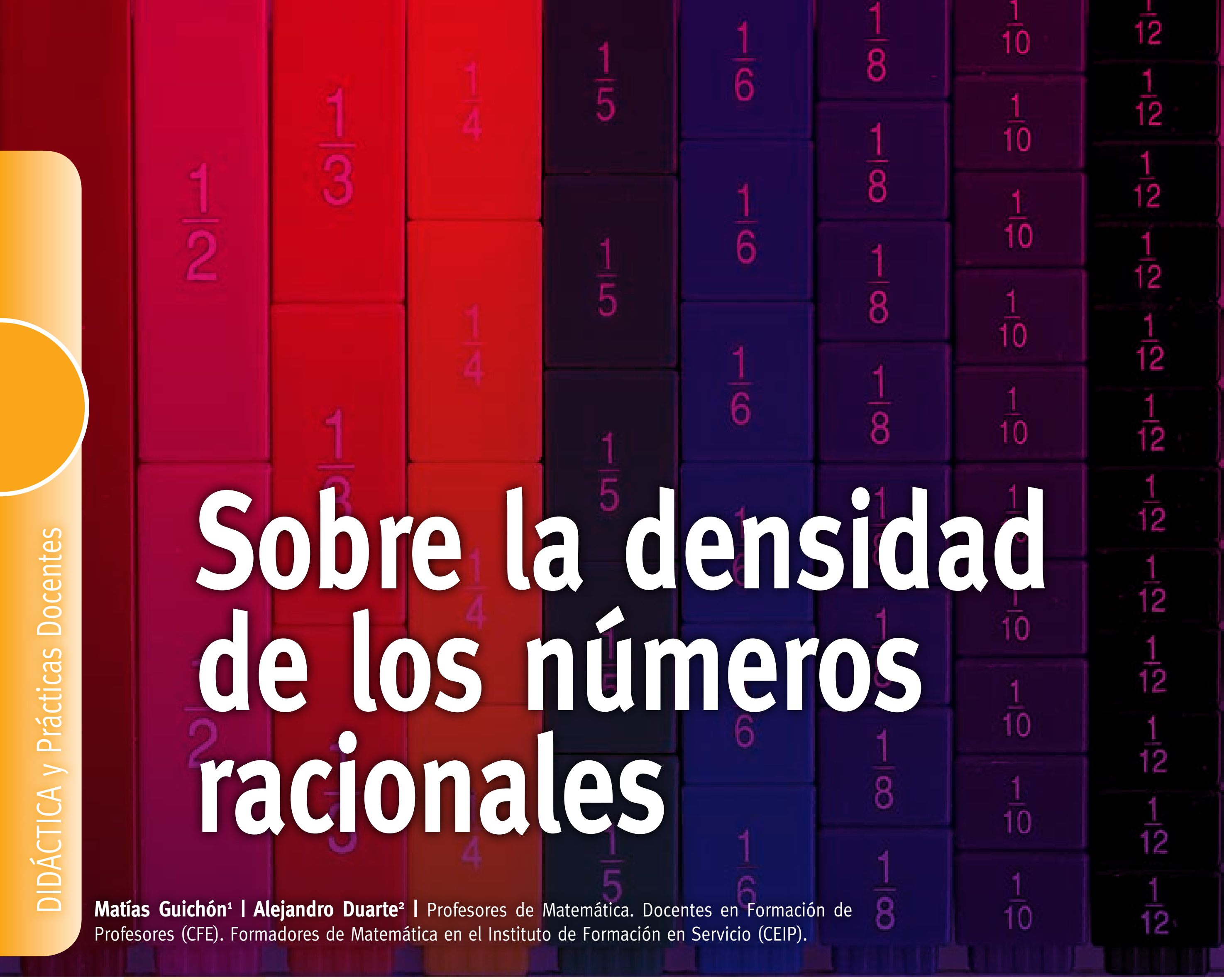


Sobre la densidad de los números racionales

Matías Guichón[1] | Alejandro Duarte[2] | Profesores de Matemática. Docentes en Formación de Profesores (CFE). Formadores de Matemática en el Instituto de Formación en Servicio (CEIP).

En este artículo pretendemos abordar la idea de densidad en el conjunto de los racionales, y su presencia en el programa escolar. Al mismo tiempo intentaremos analizar un par de actividades clásicas relacionadas con la densidad, que tienen como finalidad encontrar racionales entre otros dos. Estas se diferencian por la forma en que aparecen representados los racionales involucrados en cada una. Racionales en forma de fracción en una y decimales en la otra, que inciden sobre las estrategias de resolución, que se van a analizar y posteriormente establecer puentes de contacto entre ambas.

Para entrar en tema comencemos con un problema extraído de Broitman y otros (2003):

«El docente anota el número 3 en el pizarrón e indica a los alumnos que deben sumarle la mayor cantidad de números posibles sin pasarse de 10. Al llegar o pasarse de 10, deben detener las sumas, y entonces, gana quien logre la mayor cantidad de sumandos.»

Antes de continuar con la lectura sería interesante que pienses en posibles jugadas, y luego respondas las siguientes preguntas que nos permitirán analizar el problema:

- ¿Habrá una estrategia que me permita no perder?
- Esta estrategia, ¿me asegura ganar?

Según el mencionado artículo, comenzado el juego, los niños preguntan: *"¿Se puede con coma?"*, haciendo referencia a los sumandos utilizados:

- ¿Qué sucede si no habilitamos números "con coma"? ¿Cuál sería una buena estrategia?

[1] matiasguichon@gmail.com

[2] alejandrodufu@gmail.com

Como habrás notado al responder las preguntas anteriores, no habilitar los números "con coma" implica que el juego termine de forma bastante rápida. Por otra parte, habilitar el uso de estos números permitiría jugar ***sin perder nunca***: basta para ello sumar números "pequeños". Pero cuidado, utilizar esta estrategia no implica ganar, ya que si el "contrincante" lo hace de la misma forma, el juego no termina nunca, sin ganadores ni perdedores. Es decir, el juego se podría desarrollar infinitamente.

Para analizar más a fondo este problema, pensemos en una posible jugada de un alumno:

3 +	Números que va sumando	4	2	0,5	0,1	0,3	0,01	0,02	0,007
	Suma obtenida en cada paso	7	9	9,5	9,6	9,9	9,91	9,93	9,937

En este caso, el alumno obtuvo una suma de ocho sumandos, cuyo resultado es un número entre 3 y 10. Jugada que puede mejorarse sin mucha dificultad. Por ejemplo, si se agrega un sumando igual a 0,01 en cualquier momento de la secuencia, tendríamos nueve sumandos manteniendo un resultado entre 3 y 10. Entonces, como mencionamos antes se podría seguir jugando, manteniendo un resultado que no supere 10. Si anotamos los resultados (números) de cada suma parcial, en la tabla tendremos infinitos números entre 3 y 10. Podemos concluir entonces que "entre 3 y 10 hay infinitos números".

¿Qué está por detrás de esta conclusión? Como ya se estarán contestando, es la **densidad de los números racionales** la que permite asegurar la existencia de estos números entre 3 y 10. Pero ***¿qué es exactamente la densidad?***

Un recorrido bibliográfico nos permite encontrar los siguientes enunciados.

- *«Entre dos números racionales cualesquiera siempre es posible encontrar otro número racional, distinto de los dos primeros.»* (Sadovsky y otras, 2005:41)

- *«...dado dos números racionales siempre es posible encontrar otro comprendido entre los números dados.»* (ANEP. CODICEN, 2006:20)

De estas afirmaciones surgen algunas observaciones.

Ambas aseguran la existencia de "otro" número, *un número* entre dos racionales dados, en este caso un racional entre 3 y 10. Pero como señalamos antes, sabemos de la existencia de infinitos números racionales entre ellos. Entonces, ¿por qué los enunciados sobre la densidad aseguran la existencia de un racional intermedio y antes dijimos que la densidad es la que nos permite encontrar infinitos de estos números? Para contestar esta pregunta consideramos los racionales 1 y 1,5: estos enunciados nos aseguran la existencia de uno intermedio, por ejemplo: 1,34. La misma propiedad nos asegura que entre 1 y 1,34 hay un racional, y que entre 1,34 y 1,5 hay otro, así encontramos tres racionales entre 1 y 1,5. Reiterando este proceso podemos seguir encontrando racionales, lo que implica que entre 1 y 1,5 hay infinitos números racionales.

Por otra parte, estos enunciados aseguran que hay un racional intermedio, pero nada dicen sobre la forma de encontrarlo. Esta propiedad, entonces, no nos indica el camino para encontrar estos racionales. Antes de reflexionar sobre este punto, resuelve el siguiente problema.

Problema 1

(a) Entre 1 y 2, ¿hay infinitos números? ¿Cuáles?

(b) Encuentra algunos números entre 0,5 y 0,6; entre 0,7 y 2¼; entre 1/7 y 1/2.

(c) Intenta encontrar algunos números entre 3/8 y 5/6.

Como habrás notado en este problema, la estrategia para encontrar racionales entre otros dos depende no solo de los extremos, sino de la representación de ellos, es decir, si están escritos como fracciones, decimales o mixtos.

Con los problemas que siguen nos proponemos analizar ciertas estrategias para hallar estos números intermedios.

Problema 2

(Adaptado de Sadovsky y otras, 2005)

(a) Encuentra algunos números entre 2,5 y 2,9.

(b) ¿Puedes encontrar algún número entre 2,7 y 2,8?

(c) Indica varios números entre 2,03 y 2,1.

Para responder al primer apartado, los números 2,6; 2,7; 2,8 aparecen sin mucha dificultad. ¿Por qué estos números y no otros? Surgen de trasladar a los racionales la idea de siguiente y anterior, heredada de la numeración natural, y son los únicos en el orden de los décimos que hay entre los extremos. Con el objetivo de romper con esa posible (y única) forma de responder (a), que se basa en pensar solo en los decimales con una sola cifra después de la coma, se presenta el apartado (b). Por los números elegidos, no hay decimales con una cifra después de la coma entre ellos. Esto exige pensar en aumentar por lo menos en un orden a los decimales con los que se trabaja, es decir, contar con los centésimos. Así escritos, los extremos son 2,70 y 2,80. ¿Cuántos números con dos cifras decimales hay entre ellos? Esta forma de representación habilita los nueve números de este orden que sirven de respuesta: 2,71; 2,72;... 2,79. ¿Cuántos podemos encontrar con tres cifras después de la coma? ¿Cómo se pueden obtener más?

A esta altura del análisis hay algunas ideas o conclusiones que surgen de los procedimientos utilizados en cada caso.

- Entre dos números decimales, existen infinitos decimales.
- Entre dos decimales hay una cantidad finita de decimales que tienen cierta cantidad de decimales (tal vez ninguna).
- Una estrategia para encontrar más decimales intermedios consiste en aumentar la cantidad de cifras después de la coma.

Algunas respuestas de los alumnos frente a situaciones como la anterior, dejan rastro sobre la fuerte presencia de características o propiedades de los números naturales que permean el trabajo con racionales. Como se mencionó antes, afirmar que 2,8 es el siguiente de 2,7 evidencia esto. Pero después de analizar el problema concluimos que entre dos racionales hay otro. Esto entra en conflicto con la propiedad de siguiente o anterior, que sostiene que entre un número y su siguiente no hay más números de ese conjunto. Entonces, si 2,8 fuera el siguiente de 2,7 entre ellos no podría haber otro número, lo que es falso. Por lo que 2,7 no tiene siguiente, al igual que cualquier otro racional. Este hecho tiene lugar en el Programa Escolar. El contenido *"**Las propiedades de la numeración racional:** idea de densidad, no hay anterior ni posterior"* de sexto grado hace referencia a esto que venimos discutiendo: *los números racionales no tienen ni siguiente ni anterior*.

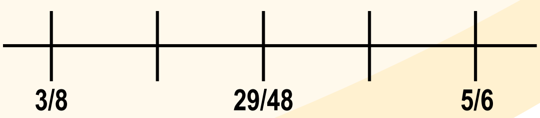
Problema 3

(a) Encuentra algunos números entre 4/9 y 8/9. ¿Cuántos encontraste?

(b) ¿Puedes encontrar algún número entre 7/5 y 8/5?

(c) Encuentra varios números entre 3/8 y 5/6.

Luego de resolver el problema anterior, habrás notado que el apartado (a) es muy sencillo: los números 5/9, 6/9 y 7/9 son algunos de los que existen entre 4/9 y 8/9. La situación cambia en el apartado (b), pues entre 7/5 y 8/5 no hay ninguna fracción de denominador 5. En ANEP. CODICEN (2006) encontramos una posible estrategia para hallar uno de estos racionales: hallar la semisuma o promedio de los extremos. En este caso, 7/5 + 8/5 = 15/5 = 3 por lo que el racional 3/2 está entre 7/5 y 8/5. En el apartado (c) los extremos no tienen igual denominador, por lo que no es posible proceder como en el caso (a), pero intentaremos poner en práctica la estrategia utilizada en el apartado (b): en este caso, la suma 3/8 + 5/6 da 29/24, por lo que 29/48 está entre 3/8 y 5/6. Si ubicamos estos números en la recta numérica, obtenemos una representación como la que sigue:



Utilizando la estrategia anterior, calcula los números marcados en la recta.

Habrás notado que estos cálculos son engorrosos, lo que nos motiva a buscar otro camino para encontrar estos números y otros. Si comparamos esta búsqueda con la realizada en el apartado (a), encontramos una diferencia: en el primer apartado se hizo muy fácil, porque las fracciones de los extremos tenían igual denominador. Podemos entonces pensar en simplificar el problema, escribiendo las fracciones 3/8 y 5/6 con igual denominador.

Si escribimos 3/8 = 18/48 y 5/6 = 40/48, el problema se reduce a encontrar números entre 18/48 y 40/48. De esta forma encontramos veintiuna fracciones de denominador 48. Es de notar que *"no hay infinitas fracciones de denominador 48 entre 3/8 y 5/6"*, pero ya mencionamos que hay infinitas entre ellas. Por lo que tenemos que buscar fracciones con otros denominadores. Como puedes observar, ninguna de estas veintiuna fracciones es 47/96 ni 79/96, ubicadas en la recta. Podemos entonces escribir 3/8 y 5/6 con denominador 96, lo que nos permitirá encontrar aún más fracciones *¿Cuántas son?* Si seguimos aumentando el denominador, la cantidad de fracciones que encontramos entre 3/8 y 5/6 aumenta.

A partir de este problema concluimos:

- Entre dos fracciones existen infinitas fracciones.
- Entre dos fracciones existe una cantidad finita de fracciones que tienen un cierto denominador (tal vez ninguna).
- Una estrategia para encontrar más fracciones intermedias consiste en aumentar el denominador.

Si volvemos al **Programa Escolar**, podemos observar que en el mismo hay un lugar para esta actividad que hemos realizado. En cuarto grado, el contenido *"**El intervalo entre fracciones**. Una fracción entre otras dos fracciones dadas"* tiene que ver con trabajo realizado en el **Problema 3**.

Podríamos seguir extendiéndonos sobre estos procedimientos en caso de que los extremos sean mixtos, o un extremo esté representado de una forma y el otro de otra forma (decimal-fracción, decimal-mixto, etc.), pero consideramos que con el análisis realizado en los **Problemas 1** y **2**, tú podrás buscar estos procedimientos.

Para cerrar, intentaremos establecer alguna relación entre los procedimientos puestos en juego en los **Problemas 2** y **3**. En primer lugar comparemos las conclusiones abordadas en ambos.

Problema 2 – Extremos decimales	Problema 3 – Extremos fraccionarios
Entre dos números decimales existen infinitos decimales.	Entre dos fracciones existen infinitas fracciones.
Entre dos decimales hay una cantidad finita de decimales que tienen cierta cantidad de decimales (tal vez ninguna).	Entre dos fracciones existe una cantidad finita de fracciones que tienen un cierto denominador (tal vez ninguna).
Una estrategia para encontrar más decimales intermedios consiste en aumentar la cantidad de cifras después de la coma.	Una estrategia para encontrar más fracciones intermedias consiste en aumentar el denominador.

Las conclusiones obtenidas en ambos problemas son similares. Estas nos indican una relación entre la cantidad de cifras decimales (extremos decimales) y el denominador (extremos fraccionarios), que se ilustra en el siguiente ejemplo donde se buscan números entre 1,5 y 1,6 o de otra forma entre 15/10 y 16/10.

	1,5 – 1,6	
1,50	1,51 - 1,52 - ... - 1,59	1,60
1,500	1,501 - 1,502 - ... - 1,599	1,600

	15/10 – 16/10	
150/100	151/100 – 152/100 - ... - 159/100	160/100
1500/1000	1501/1000 – 1502/1000 - ... - 1599/1000	1600/1000

Como se puede observar, ambas estrategias esconden la misma idea: la de "ampliar" los espacios entre extremos con el fin de encontrar cada vez más números intermedios.

Para ir terminando...

La noción de densidad es compleja y como otros aspectos de los números racionales implica romper con ideas que tienen los niños sobre los números naturales. Los alumnos comenzarán a construir esta idea en la medida en que se enfrenten a situaciones que los obliguen a reflexionar sobre ella. Como analizamos en este artículo, los procedimientos para encontrar racionales intermedios dependen de la forma de escribir los extremos, pero existe una relación entre estos procedimientos. Es tarea de la escuela enfrentar a los alumnos a estas situaciones, así como ayudarlos a construir dichas relaciones. Q

Bibliografía de referencia

ANEP. CODICEN. República Oriental del Uruguay (2006): *Cuadernos de Estudio II*. Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP. En línea: http://www.mecaep.edu.uy/pdf/matematicas/2012/CuadernoDeEstudioII.pdf

BROITMAN, Claudia; ITZCOVICH, Horacio; QUARANTA, María Emilia (2003): "La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad" en *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 6, Nº 1 (Marzo), pp. 5-26. En línea: http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001/File/La%20ense%C3%B1anza%20de%20los%20Q-%20Revista%20Relime.pdf

CENTENO PÉREZ, Julia (1988): *Números decimales: ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Editorial Síntesis. Colección Matemáticas: Cultura y aprendizaje.

SADOVSKY, Patricia (coord. autoral); LAMELA, Cecilia; CARRASCO, Dora (elab. del material) (2005): *Matemática. Fracciones y números decimales. 7º grado. Apuntes para la enseñanza*. Buenos Aires: Secretaría de Educación. GCBA. En línea: http://uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001/File/m7_docente.pdf

SADOVSKY, Patricia (coord. autoral); QUARANTA, María Emilia; PONCE, Héctor (elab. del material) (2006): *Matemática. Cálculo mental con números racionales. Apuntes para la Enseñanza*. En línea: http://www.sermaestro.com.ar/calculo_racional_web.pdf