Álgebra: aportes para nuevas reflexiones

Ariel Fripp | Profesor de Matemática. Formador de maestros en Matemática y Didáctica de la Matemática.

El presente artículo forma parte del trabajo de análisis y discusión del Programa para Educación Inicial y Primaria que venimos desarrollando con la Prof.ª Beatriz Rodríguez Rava en los diferentes ámbitos de trabajo que compartimos.

El nuevo programa intenta recoger los aportes que la Didáctica de la Matemática plantea y que desde hace muchos años trabajamos en nuestro país.

Presenta algunas notas innovadoras al incluir la Probabilidad y la Estadística en todo el ciclo, y el Álgebra a partir de cuarto año.

En el número anterior de esta revista nos preguntábamos sobre la presencia del Álgebra en la Escuela Primaria[1], y presentábamos algunas cuestiones generales que intentaron dar pistas para delinear un posible trabajo en este nivel educativo.

Este nuevo artículo intentará centrarse concretamente en el planteo que el Programa efectúa en lo referente a Álgebra, para poder brindar al maestro apoyo para una lectura crítica y así analizar posibilidades de implementación.

¿En qué pensamos cuando pensamos en Álgebra?

Para una gran mayoría de maestros, pensar en Álgebra implica pensar "en letras", recordar tediosos ejercicios con ecuaciones e inecuaciones, pensar en "pasar sumando lo que está restando y dividiendo lo que está multiplicando"…

Para un número más reducido, pensar en Álgebra implica pensar en generalizaciones, en leyes, en estructuras…

Y para muy pocos, pensar en Álgebra les provoca agradables estados de ánimo.

¿Cuál es el planteo del programa escolar?

Los contenidos se presentan en el siguiente cuadro[2]:

4º año	5º año	6º año
El patrón. El número generalizado.	La variable como expresión del número generalizado.	La variable como expresión del número desconocido.

Algunas de las palabras que aparecen en el programa se vinculan directamente con aquellas que evocamos cuando pensamos en Álgebra, son parte de nuestra historia como estudiantes y como docentes. Con algunas otras no ocurre lo mismo, ¿qué es un patrón?, ¿qué es un número generalizado?

Para poder acordar sobre el significado de estas expresiones deberíamos primero elegir una posible definición de Álgebra, que contemple en parte lo que efectivamente podría hacerse en la Escuela Primaria.

En general, las definiciones de Álgebra poco aportan en relación a lo que la Escuela podría

[1] A. Fripp (2009).

[2] No se transcribe la lista de actividades que se propone para cada año, ya que las mismas no dejan de ser meros ejemplos.

hacer. Algunas de ellas, manejadas por distintos autores, afirman:

El Álgebra es la rama de las matemáticas que estudia las estructuras, relaciones y cantidades. El Álgebra es una de las principales ramas de la matemática.

Parte de las matemáticas que trata de la cantidad considerada en general y la representa por letras y otros signos.

Esta segunda definición comienza a brindarnos ciertas pistas.

Consideramos de mayor riqueza una caracterización del Álgebra que dé cuenta de sus diferentes dimensiones. En ese sentido compartimos la concepción de Álgebra que engloba:

- el estudio y generalización de patrones numéricos;
- el poder expresar y formalizar las generalizaciones;
- las relaciones funcionales;
- el desarrollo y la manipulación de simbolismos;
- el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones.

Como la propuesta de Álgebra se explicita para los tres últimos años de la escolaridad, exige analizar de qué manera el colectivo de maestros tendrá que contemplar y favorecer el trabajo continuo a lo largo del ciclo. Exige pensar cuáles serán las acciones que los maestros desde Nivel Inicial a 3º planificarán y que podrían estar abonando el trabajo algebraico que se exige a partir de 4º.

Para aportar en este sentido, vale la pena rescatar nuevamente la caracterización de Álgebra que propone Vallejo[3].

«Los números, como todos los objetos de los conocimientos humanos, se pueden considerar en general y en particular, es decir, bajo la relación de sus leyes y bajo la de sus hechos. Por ejemplo, esta proposición: la suma de dos números multiplicada por su diferencia, es igual a la diferencia de sus cuadrados, es una ley de los números, porque se aplica generalmente a todos ellos; mientras que esta: once multiplicado por cinco es igual a cincuenta y cinco, es un hecho de dos números, porque solo se aplica a los números 11, 5 y 55.

***Esta distinción divide a la ciencia de los números en dos ramos generales, de los cuales el que trata de leyes, es el álgebra, y el que trata de los hechos es la Aritmética**.»*[4]

Detengámonos un momento a analizar las prácticas numéricas que ocurren en los primeros grados de la escolaridad. En ellas abunda el trabajo con "hechos".

Pensemos en las composiciones aditivas que efectúan, en este nivel, lo s alumnos; para ellos, es "un hecho" que 5 + 5 sea 10 o que 5 + 15 sea 20.

La adecuada gestión del maestro podría propiciar que tales "hechos" puedan constituirse en "leyes", en una regla general: al sumar dos números "terminados" en cinco, el resultado siempre "termina" en cero.

Donde un niño reconoce la tabla del dos como un hecho, el maestro reconoce una ley de formación de los números pares: "un número par se obtiene multiplicando cualquier número entero por dos".

Análisis como los anteriores permiten vislumbrar la presencia del Álgebra estructurando la Aritmética, dándole soporte general. Si el Álgebra no cumpliera con esta tarea, cada vez que nos enfrentamos a "hechos aritméticos" tendríamos que comenzar desde cero; para cada cálculo tendríamos que volver a pensar cómo efectuarlo. El Álgebra nos brinda una red estructurante que nos habilita a pensar en cuestiones que se cumplen siempre.

Esta postura que reconoce al Álgebra como soporte estructurante de la Aritmética hace visible un posible nexo entre el trabajo escolar hasta tercer año y el que se efectuará a partir de cuarto año.

El estudio de la Numeración y, dentro de este eje, el énfasis en las Regularidades estará contribuyendo a que los alumnos "comiencen a pensar en cuestiones que se cumplen siempre": *"sé que 5 x 5 es 25, pero también sé que si multiplico dos números que 'terminan' en cinco, el resultado siempre 'termina' en cinco"*.

[3] A. Fripp (2009).

[4] J. M. Vallejo (1841), citado por B. Gómez Alfonso (1995). El destaque en negrita es nuestro.

Entonces, ¿hace Álgebra el maestro de 2º año cuando propone actividades que fomentan razonamientos como el anterior? La respuesta es no.

El maestro está propiciando que sus alumnos comiencen a pensar en cuestiones generales, lo que podría estar ayudando a significar mejor el trabajo a realizar a partir de cuarto año.

Entonces… ¿cómo abordar en la Escuela los contenidos de Álgebra que plantea el Programa?

4º año – “El patrón. El número generalizado.”
5º año – “La variable como expresión del número generalizado.”
6º año – “La variable como expresión del número desconocido.”[5]

Podrían existir dos posibles lecturas de lo que se propone, las cuales implicarían dos posturas docentes bien diferentes.

Por un lado, el maestro podría verse tentado a trabajar, en pocas clases, con los ejemplos que el programa plantea para cada uno de los grados y, de esa manera, “cumplir” con lo que desde el documento se propone.

Por otro lado podría preguntarse qué puede trabajar en 4º, 5º o 6º a partir de esos “grandes titulares”, y así generar acciones que se vinculen con el trabajo algebraico.

Esta última es la posición que compartimos y en ese sentido analizaremos los contenidos de Álgebra para cada uno de los tres últimos grados de la escolaridad.

4º año - El patrón

Un patrón es aquello que permite construir una sucesión de signos (orales, gestuales, gráficos, numéricos, de comportamiento, etc.), siguiendo una regla de repetición o de recurrencia.

Veamos cuatro ejemplos:

a)  **…**

b) **3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 …**

c) **triángulo pentágono heptágono …**

d) **1 2 3 6 12 24 …**

En el primer ejemplo reconocemos una serie formada por figuras geométricas del plano cuyo patrón de formación es el par ordenado “triángulo rojo, cuadrado verde”. Es un patrón de formación que apela a la simple repetición: primero un triángulo rojo, luego un cuadrado verde, y así sucesivamente.

La segunda serie, al igual que la primera, responde a un patrón de repetición. En este caso, el patrón es el número 3, el cual es repetido siempre.

El tercer ejemplo puede estar dando cuenta de una serie de palabras que hacen referencia al nombre de figuras geométricas planas. Cada “palabra-nombre” que sigue a “triángulo” corresponde a un polígono que tiene dos lados más que el polígono nombrado en el lugar anterior. En este caso, el patrón ya no es de repetición, sino de recurrencia: para obtener cada elemento de la serie, a partir del segundo, se recurre al anterior.

En el último ejemplo planteado: 1 2 3 6 12 24… podemos enunciar como regla de formación de la serie lo siguiente: “la serie está formada por el 1, el 2 y el 3, y luego cada número se obtiene multiplicando el anterior por dos”.

1
2
3
6 (6 = 3 x 2)
12 (12 = 6 x 2)
24 (24 = 12 x 2)
…

Podríamos identificar otro posible patrón, lo cual implica un enunciado diferente al anterior. Se podría plantear que la serie está formada por el 1, el 2, y cada elemento siguiente es la suma de todos los anteriores.

1
2
3 (3 = 1 + 2)
6 (6 = 1 + 2 + 3)
12 (12 = 1 + 2 + 3 + 6)
24 (24 = 1 + 2 + 3 + 6 + 12)

[5] ANEP. CODICEN. CEP (2009).

Esta serie numérica aporta elementos interesantes que contribuyen al análisis del primer contenido algebraico del programa escolar: El patrón.

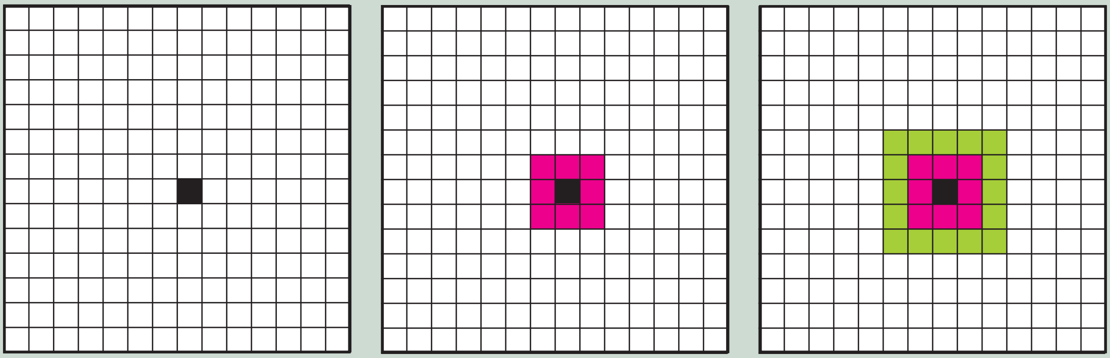
Podemos observar que al trabajar con patrones son tres las acciones a tener en cuenta. Es necesario identificarlo, acción que va más allá de una simple percepción, decirlo y registrarlo.

Patrones diferentes[6] generan enunciados diferentes.

4º año - El número generalizado

Para abordar esta idea recurramos a una actividad planteada en el número anterior de esta revista (A. Fripp, 2009).

Marcela tiene dibujado un cuadrado en una hoja de papel centimetrado y comienza a pintar alrededor de él como muestran estas figuras:



Si tienes en cuenta el trabajo que está haciendo Marcela, podrás completar esta tabla.

1ª "vuelta"	Pinta 8 cuadraditos
2ª "vuelta"	Pinta 16 cuadraditos
3ª "vuelta"	Pinta… cuadraditos
4ª "vuelta"	Pinta… cuadraditos
5ª "vuelta"	

¿Cuántos cuadraditos pintará Marcela en la vuelta número 20?

Escribe una 'regla' que explique cómo haces para encontrar siempre la cantidad de cuadraditos que se pintan en cada 'vuelta'.

La serie que da cuenta de la cantidad de cuadraditos que se van pintando está formada por los siguientes números:

8 16 24 32 40 48…

Reconocemos, "como un hecho", que cada uno de ellos es un múltiplo de ocho, por lo que podríamos enunciar como patrón: "son los múltiplos de ocho (sin contar el cero[7])", "es la tabla del ocho".

¿Cómo se obtiene cada uno de los elementos de esa serie? Se obtiene multiplicando al número ocho por cada uno de los números naturales:

8 (8 = 8 x 1)
16 (16 = 8 x 2)
24 (24 = 8 x 3)
32 (32 = 8 x 4)
…

Si al número de vueltas, el cual coincide con los sucesivos números naturales, lo representamos con la letra V, podemos generalizar cada elemento de la serie anterior y expresarlos a todos ellos diciendo que son números que se generan al efectuar la multiplicación 8 x V.

La expresión algebraica 8 x V ya no representa a un múltiplo de ocho en particular, sino que está generalizando a todos los múltiplos de ocho de esta serie.

Podemos establecer que 8 x V es un número generalizado, es la generalización de los múltiplos de ocho.

El número generalizado permite registrar un patrón identificado.

[6] En otros niveles educativos se podrá estudiar si efectivamente "son diferentes" o existe la posibilidad de demostrar su equivalencia.

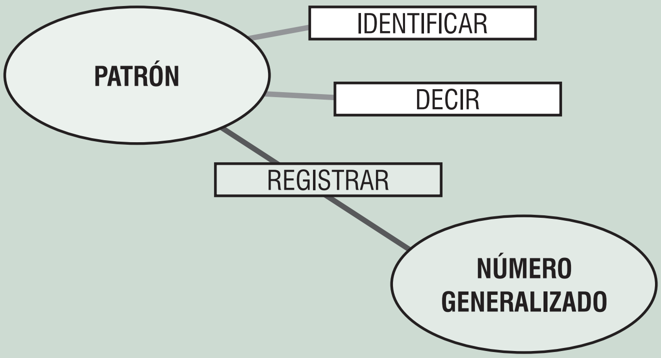
[7] Recordamos que cero es múltiplo de cualquier número natural.

5º año - La variable como expresión del número generalizado

En el ejemplo anterior se identificó un patrón, el cual se expresó como "múltiplos de ocho" y se registró a través de la expresión 8 x V.

Es intención ahora trabajar con esta expresión con la finalidad de analizar didácticamente el contenido que el programa escolar establece para quinto año: La variable como expresión del número generalizado.

Reconocemos que para obtener la cantidad de cuadraditos de cada vuelta podemos recurrir a la expresión 8 x V, donde V está representando a cualquier número natural mayor que cero. V varía en dicho conjunto numérico, V se estaría comportando como una variable. Destacamos, entonces, que las variables permiten registrar un número generalizado que, a su vez, da cuenta de un patrón numérico.



Generalmente, las variables aparecen en situaciones de dependencia funcional como la que analizamos antes, donde la cantidad de cuadraditos de cada vuelta está en función del número de vuelta que se considere. Cuando el número de vueltas varía, funcionalmente también lo hace la cantidad de cuadraditos.

Veamos otro ejemplo.

La siguiente tabla da cuenta de la cantidad de aristas de un prisma a medida que aumentamos el número de lados de la base.

Base del prisma	△	▭	⬠	⬡			
Cantidad total de aristas	9	12	15	18			

¿Cuántas aristas tiene un prisma cuya base es de 7 lados?, ¿y si la base tiene 10 lados?

En ningún momento, el enunciado de esta actividad hace referencia en forma explícita a los contenidos algebraicos que hemos analizado, pero estos contenidos formarán parte de la estrategia de resolución.

Los alumnos podrán **identificar** diferentes patrones:

- *"Cada número se obtiene, a partir del 9, sumándole tres al anterior"* (este patrón hace referencia a una regla de formación recurrente).
- *"Son los múltiplos de tres a partir del 9"*.
- *"Son los múltiplos de tres a partir del 9. Se obtienen multiplicando la cantidad de lados de la base por tres"*.

La actividad propuesta no está exigiendo que los alumnos tengan que explicitar, que **decir** cuál es el patrón identificado. Será el maestro quien deberá generar espacios donde esto sea necesario.

¿Cómo funciona aquí la variable como expresión del número generalizado?

Si le llamamos L al número de lados de la base de cada prisma, reconocemos a la letra L como una variable, su rango de variación está conformado por los sucesivos números naturales a partir del tres.

Esta letra, considerada como variable, permite que **registremos** algebraicamente a la cantidad total de aristas del prisma como L . 3.

¿Qué aportan registros de este tipo o razonamientos de este tipo?

Las dos preguntas que forman parte de la consigna de la actividad que estamos discutiendo podrían ser contestadas por los alumnos sin necesidad alguna de recurrir a generalizaciones como la anterior. Para saber cuántas aristas tiene un prisma de base heptagonal, los alumnos ponen en juego un patrón de recurrencia y simplemente le suman 3 a la cantidad de aristas anterior. Lo mismo se podría hacer para el caso de tener 10 lados en la base.

Pero ¿cómo procederían si les preguntáramos por un prisma que tiene 23 lados en la base? En este caso es fácil reconocer la utilidad de un registro que no apele a recurrencias.

Foto: Concurso fotográfico QE / Luana Padilla

6º año - La variable como expresión del número desconocido

Continuemos con el ejemplo anterior, donde contábamos la cantidad total de aristas de un prisma al variar el número de lados de la base.

Llamándole L a la cantidad de lados de la base, obtenemos una fórmula que permite calcular la cantidad total de aristas del prisma (C).

C = L . 3

La "letra" L, como ya vimos, se comporta como una variable.

Pensemos, por un momento, en una variante de esta actividad, en la cual se les pregunta a los alumnos si es posible encontrar un prisma que tenga en total 51 aristas.

El alumno de sexto año puede responder sin dificultad a dicho planteo, apelando a procedimientos aritméticos: *"busco un número que multiplicado por tres me dé 51. La base tiene 17 lados"*.

Si registráramos algebraicamente esta situación para poder analizarla, encontraríamos como modelo la siguiente expresión:

51 = L . 3 de donde L es un tercio de 51, L toma el valor 17.

Es interesante destacar el comportamiento de la "letra" L en los dos planteos que se han hecho.

Por un lado, "L" se comporta como variable en C = L . 3 y, por otro lado, "L" pierde su característica de variable en 51 = L . 3.

En este último planteo, la letra L pasa a representar un número desconocido, la letra L se comporta como incógnita.

Veamos otro ejemplo de uso habitual en la escuela primaria.

Para calcular el área de un rectángulo, se suele utilizar la fórmula Área = l x a donde las letras "l" y "a" se comportan como variables que expresan la medida del largo y del ancho del rectángulo.

$$\text{Área del rectángulo} = \underbrace{\text{l x a}}_{\text{“Letras” como variables}}$$

¿Qué ocurre con la "letra a" cuando planteamos encontrar el ancho de un rectángulo cuya área es 24 m^2, sabiendo que el largo es de 8 m?

Ahora la letra "a" es la expresión de un número desconocido, la letra "a" es una incógnita.

Por lo tanto, una "letra" se comporta como variable (la letra como expresión del número generalizado) o se comporta como incógnita (la letra como expresión del número desconocido).

Parecería entonces "poco feliz" el enunciado del contenido para sexto año.

Consideraciones finales

En el número anterior de esta revista planteábamos dos mojones para orientar el trabajo algebraico:

1) habilitar a los alumnos a explicitar reglas generales al resolver situaciones problemáticas en contextos aritméticos o geométricos;
2) abordar actividades algebraicas en la escuela primaria no exige la utilización de "letras".

Estos mojones hacen referencia al trabajo con patrones. Para explicitar reglas generales, en primer lugar se hace necesario identificarlas. Apostamos a que los colectivos docentes logren acuerdos importantes que permitan establecer vínculos entre el eje Numeración y el eje Álgebra, para que los alumnos se acerquen a actividades donde se puedan ir construyendo enunciados del tipo "se cumple siempre que…".

El segundo mojón planteado nos alerta sobre la persistente seducción a la temprana introducción de "las letras", creyendo que esa "es" la manera de estar trabajando Álgebra.

A su vez, este planteo nos habilita a discutir en mayor profundidad la presencia de las letras en sus dos posibles funciones: o son variables o son incógnitas.

La inclusión del Álgebra en la Educación Primaria genera responsabilidades varias a los distintos profesionales involucrados con este nivel educativo.

Por un lado, el colectivo de maestros deberá discutir profundamente dos cuestiones. La primera tiene que ver con la organización de los contenidos a enseñar en cada grado, la cual debe favorecer el continuo a lo largo del ciclo, ¿qué aportarán Nivel Inicial, 1º, 2º y 3º?

Se hace necesario, también, tomar una postura sobre el trabajo algebraico que se efectuará en la escuela, en lo referente a su posible consideración como "previo al abordaje liceal".

Quienes trabajamos en la Formación Inicial y en Servicio de Maestros, y quienes producimos materiales para ellos, nos enfrentamos también a otro desafío.

Tenemos la necesidad de traducir en palabras o acciones el resultado de muchos años de trabajo analítico en torno a la enseñanza del Álgebra.

Esta necesidad adquiere ribetes de obligación, cuando observamos la soledad con la que el maestro de clase se está enfrentando a la implementación del Programa para Educación Inicial y Primaria en el Área del Conocimiento Matemático.

Los artículos "¿Álgebra en la escuela primaria?" y "Álgebra: aportes para nuevas reflexiones" intentan brindar algunos elementos necesarios para la reflexión didáctica que se tendrá que dar en los diferentes colectivos docentes.

Bibliografía

ANEP. CEP. República Oriental del Uruguay (2009): *Programa de Educación Inicial y Primaria. Año 2008*. En línea: http://www.cep.edu.uy/programaescolar/index.htm [Último ingreso: 25 de febrero de 2009].

CARRAHER, Terezinha; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analúcia (1991): *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo XXI editores.

FRIPP, Ariel (2009): "¿Álgebra en la escuela primaria?" en Revista *QUEHACER EDUCATIVO*, Nº 93 (Febrero), Edición Especial: *El maestro como constructor de currículo*, pp. 45-50. Montevideo: FUM-TEP.

KAPUT, James J. (1996): "¿Una línea de investigación que sustente la reforma del Álgebra?" en *UNO. Didáctica de las Matemáticas*, Nº 9 (Julio, Agosto, Setiembre): "El futuro del Álgebra y de la aritmética". Barcelona: Ed. Graó.

MOLINA GONZÁLEZ, Marta (2007): "Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria". Tesis doctoral. Directores de la Tesis: Encarnación Castro Martínez; Enrique Castro Martínez. Granada: Universidad de Granada. En línea: http://documat.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210 [Último ingreso: 15 de febrero de 2009].