El cuadrado mágico

Escenario para actividades de corte algebraico

Ariel Fripp | Profesor de Matemática. Formador de maestros en Matemática y Didáctica de la Matemática.

En artículos anteriores planteé aspectos a considerar al momento de pensar en acciones de enseñanza con corte algebraico en la escuela primaria. Fue así que (Fripp, 2009a) destaqué algunos mojones a tener en cuenta al momento de planificar actividades de este tipo. También analicé (Fripp, 2009b) el eje Álgebra del Programa para Educación Inicial y Primaria e intenté discutir en profundidad algunas propuestas de aula.

Una de las intenciones de este nuevo artículo es continuar aportando aspectos que permitan integrar el eje Álgebra al trabajo matemático escolar. Integración que no solo pienso para los tres últimos años, sino para toda la escolaridad.

Otra de las intenciones es sondear brevemente en la historia de la Matemática, en busca de algunos argumentos que contribuyan a sustentar posturas didácticas sobre el trabajo algebraico escolar actual que planteo.

¿Qué contenidos o aspectos de contenidos atraviesan toda la escolaridad y pueden oficiar como puerta de entrada de actividades con corte algebraico?

Considero que la Numeración puede brindarnos una respuesta.

Si el Álgebra escolar puede caracterizarse, entre otras cosas, como aquella rama de la Matemática que se encarga del estudio de leyes o de generalidades, **podríamos considerar entonces a las Regularidades Numéricas como el puente que se tiende entre la Numeración y el Álgebra**.

Un planificado y pensado trabajo con las regularidades numéricas, se constituye en un abordaje necesario para la construcción de la noción de número y la profundización en el conocimiento del Sistema de Numeración Natural. Este trabajo planificado y pensado estaría también contribuyendo con trabajos de corte algebraico.

Numeración (aspectos a trabajar)	**Álgebra**
Orden	
Composición y descomposición de números	
Producción e interpretación numérica	
Valor posicional	
Regularidades	**Actividades de corte algebraico**
Conteo	

En la Numeración, trabajar con las Regularidades exige atender a aquello que es común a un conjunto de números: "la cifra de las unidades de los números pares no puede ser 1, 3, 5, 7 ni 9", "después de un número que termina en nueve siempre viene uno que termina en cero", etc.

Las actividades de corte algebraico, posibles de ser desarrolladas en la escuela primaria, exigen que los alumnos deban identificar un patrón, explicitarlo y registrarlo.

Al explicitarlo, el alumno se ve en la necesidad de verbalizar lo que identificó; este "decir lo que veo" podría exigir un registro escrito que diera cuenta de lo observado.

Aquí radica justamente una de las mayores dificultades en el trabajo algebraico. Ante la necesidad de registrar algo que es común a todo un conjunto y lo estructura, el docente se ve tentado a fomentar, prematuramente, la utilización del lenguaje simbólico.

«[…] el paso a un sistema simbólico eliminó los significados de ítems individuales y aún de las operaciones que actuaban sobre ellos. El lenguaje simbólico es poderoso porque elimina muchas de las distinciones que lo vernáculo preserva y expande en gran medida su aplicabilidad. Sin embargo, Wheeler recalca que el lenguaje simbólico es, desde el punto de vista semántico, extremadamente débil […]» (C. Kieran, 1995:4)

Fomentar el registro de una regularidad a través del lenguaje simbólico podría estar provocando, en este nivel educativo, un deslizamiento en las preocupaciones del maestro desde los significados hacia la sintaxis. Podría estar dejando de lado lo que se representa, por la representación misma, rompiendo así el justo equilibrio entre significado y significante.

Presentaré un tipo de actividad posible de abordar en el nivel escolar y la analizaré como escenario propicio para establecer un puente entre la Numeración y el Álgebra.

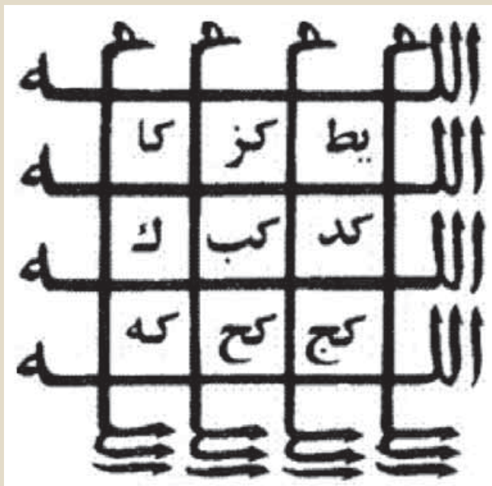
Los cuadrados mágicos

Un cuadrado mágico (de suma) se construye dividiendo un cuadrado en casillas, también cuadradas, como si fuera un damero. En cada una de las casillas se coloca un número, de manera que la suma de los números de cualquier fila, columna o diagonal siempre sea la misma.

En una carta, el matemático P. Fermat afirmaba, haciendo referencia a los cuadrados mágicos, no conocer *«nada más bello en Aritmética que esos arreglos del número que unos llaman planetarios y otros mágicos»* (en P. Tannery; Ch. Henry, 1891). En diferentes culturas y épocas, los cuadrados mágicos han gozado de una fuerte reputación, por considerarlos ya sea como potentes talismanes, conectores religiosos, juegos, obras de ingenio u obras de arte.

Su presencia la podemos encontrar en leyendas chinas, alrededor del año 2000 a. C., manuscritos árabes y obras del Renacimiento.

***Melancolía I*, Durero (1514)**



Cuadrado mágico árabe con el número de Alá

Cuadrado mágico en la Fachada de la Pasión. Sagrada Familia. Barcelona

Utiliza todos los números naturales del 1 al 9 y completa este cuadrado para obtener un "cuadrado mágico de suma 15".

Esta actividad exige conocimiento por parte del alumno de lo que es un cuadrado mágico.

Proceder por tanteo se convierte en un camino usual para lograr completar este cuadrado. En un principio, el tanteo puede ser totalmente desordenado y no respetar la consigna de la actividad: los alumnos repiten cifras en las diferentes casillas[1].

Es de esperar que, paulatinamente, se comiencen a establecer algunas conclusiones potentes que conduzcan a la solución. A modo de ejemplo presento algunas:

- "Maestra, el 9 no puede ir en el 'medio'."

Obviamente que esto no es posible, ya que si se hiciera, el 9 se encontraría en la misma línea[2] con el 6 o el 7, lo cual generaría, en esa línea, una suma mayor que 15.

6	**9**	

La segunda fila sumaría más que 15

6		
	9	

La diagonal principal sumaría más que 15

	9	
	6	

La segunda columna sumaría más que 15

- "Vimos que tenemos que 'separar' los números 'grandes' y no poner juntos tampoco a los números muy 'chicos'."
- "Nosotros escribimos todos los números que nos pediste y empezamos a 'repartirlos' en los casilleros."

Ellos escribieron una lista con los nueve dígitos con los que se estaba trabajando.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

Observaron que el 5 es el número que deja la misma cantidad de cifras a la "izquierda" y a la "derecha", por lo que consideraron que el 5 podría ubicarse también en la casilla central del cuadrado mágico.

Esta simple observación les permitió resolver la actividad.

A continuación, presento una posible solución[3] al problema.

---

[1] El cuadrado en cuestión tiene 9 casillas a completar y como la consigna exige utilizar todos los números naturales del 1 al 9, la repetición de dígitos no es posible.

[2] En una distribución matricial, como es el cuadrado mágico, llamamos línea a una columna, fila o diagonal.

[3] Es interesante destacar que pueden obtenerse otras soluciones intercambiando, por ejemplo, la primera fila por la primera columna o haciendo girar los números alrededor del número 5 central.

4	9	2
3	**5**	7
8	1	6

Sin lugar a dudas, completar un cuadrado de este tipo exige poseer conocimientos aritméticos básicos para buscar tres números que sumados den 15.

¿Dónde y cómo establecer un puente hacia una actividad de corte algebraico?

Comparto algunas observaciones interesantes que surgieron una vez que fue presentada la solución a la actividad propuesta y que pueden comenzar a brindarnos pistas para responder la pregunta anterior.

- "En las esquinas del cuadrado solamente hay números pares."
- "Nunca quedaron tres números pares juntos."
- "No se puede obtener 15 sumando tres números pares."
- "Par + Par + Par nunca da Impar."

Estas observaciones dan cuenta de regularidades identificadas por los alumnos y que son verbalizadas de diferente forma.

Basándome en planteos de R. Campos Lins (2000) (citado por P. Sadovsky; C. Sessa, 2004), diría que estos alumnos poseen diferentes conocimientos, ya que identifican un mismo patrón, lo enuncian de diferente manera y seguramente no lo validan igual.

En las aseveraciones formuladas, pueden detectarse razonamientos que comienzan a despegarse del hecho numérico, para acercarse a la formulación de una ley. Las dos primeras conclusiones tienen una referencia inmediata y directa al cuadrado mágico con el que se trabaja. La cuarta, deja de lado el caso particular del número 15 y se enuncia como una ley que relaciona a tres números pares cualesquiera con su posible suma impar.

Se podría pensar que estos alumnos no hacen Álgebra, ya que sus enunciados no se formulan a través del simbolismo propio de esta rama de la Matemática; pero ¿se podría aseverar que no están ocurriendo procesos cognitivos propios del aprendizaje algebraico?

«El análisis histórico del desarrollo del simbolismo algebraico y de sus reglas de transformación destaca la distinción entre el uso de letras para representar incógnitas y el uso de letras para representar cantidades dadas cuando se expresan soluciones generales y como herramienta para probar reglas que gobiernan relaciones numéricas. También destaca la pérdida gradual de significado al ir pasando de descripciones generales en lenguaje ordinario hacia representaciones simbólicas y procedimientos. El énfasis del recuento está alrededor del simbolismo algebraico. Sin embargo el resumen histórico sugiere que el desarrollo del simbolismo algebraico facilitó un cambio de una perspectiva procedimental a una estructural en el álgebra. ***Algunos procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra escolar tienen sus raíces en el desarrollo histórico del álgebra como sistema simbólico.***[4]» (C. Kieran, 1995:1)

La evolución del Álgebra puede resumirse en el siguiente cuadro:

Álgebra retórica	A falta de símbolos, todo cálculo o descripción de reglas son efectuados en palabras a través del lenguaje ordinario.	Se destaca, en el siglo VIII, Ibn Musa Al-Khwarizmi.
Álgebra sincopada o lacónica	A las descripciones en lenguaje ordinario se le intercalan algunas abreviaturas para representar operaciones matemáticas o incógnitas.	Tiene su auge con los matemáticos italianos del Renacimiento, quienes se basan en trabajos de Diofanto. Merece ser recordado Luca Pacioli.
Álgebra simbólica	Utiliza signos específicos para datos, incógnitas y operaciones, tal como los conocemos hoy.	El máximo propulsor fue Francisco Viète en el siglo XVI.

[4] El destaque en negrita es nuestro.

Ibn Musa Al-Khwarizmi (780-850)

Luca Pacioli (1445-1517)

Francisco Viète (1540-1603)

La afirmación “No se puede obtener un número impar sumando tres números pares” podría pensarse como un enunciado retórico en el cual una ley general es enunciada a través del lenguaje ordinario.

Los renacentistas italianos, quienes le llamaban *cosa* a la incógnita (si había más de una incógnita apelaban a otros nombres como *tantum*, *quantitas* o llegaban a emplear alguna letra mayúscula) y utilizaban las abreviaturas *p* (*plus*) y *m* (*minus*) para representar respectivamente las operaciones de más y de menos, nos otorgarían un enunciado cercano a este:

2*cosa p* 2*tantum p* 2*quantitas* non egales à 2R *p* 1

Hoy en día escribiríamos simbólicamente:

$2x + 2y + 2z \neq 2w+1$

El hombre llegó a escribir, de este modo, soluciones generales, formulaciones de reglas o leyes y descripciones de relaciones funcionales por necesidad de comunicación. El enunciado debía ser lo más transparente posible, carecer de ambigüedad en su significado y de información superflua.

Estas cuestiones que nos brinda la historia fortalecen la conclusión de que las leyes generales posibles de ser trabajadas en la escuela primaria, en el sentido que puedan ser enunciadas y construidas por los alumnos y no mostradas por el maestro, tendrían que priorizar los registros en lenguaje corriente. Las incursiones hacia simbolismos deberían ser las que ocurran en menor grado, si se apuesta a cargar de significado el trabajo matemático escolar.

El lenguaje algebraico es sumamente potente, los símbolos dejan de representar hechos numéricos para pasar a constituirse en objetos matemáticos sobre los cuales se opera. Sfard (1991) diría que los símbolos algebraicos son considerados estructuralmente como objetos: 2*x* deja de indicar el proceso de multiplicar al número dos por un número desconocido *x*, para pasar a indicar a toda una clase de números, los números pares. La expresión “2*x*” representa al número par generalizado.

Por esta razón, un trabajo donde se fomente superficialmente cambiar un número por una letra no contribuye en nada al desarrollo, en el niño como sujeto de aprendizaje, de procesos cognitivos cercanos a los que son útiles para pensar en Álgebra.

Para el maestro sí se hace necesario el conocimiento de este lenguaje, pues le permite acercarse a la estructura que sustenta el trabajo aritmético que desarrolla en su labor diaria.

Pensar que en clase únicamente se priorizan aquellos momentos en los cuales los alumnos construyen conocimientos al interactuar con un medio que les presenta conflictos, no reconoce al aula como espacio de producción socio-cultural, donde las interacciones de tipo social son imprescindibles. El maestro oficia como regulador cultural de dichas producciones, al ser él quien está en contacto con el saber sabio y, por ende, con parte de la estructura matemática y, en especial, algebraica que sustenta el trabajo de su clase.

Si vuelvo al cuadrado mágico con el que inicié este análisis, para el maestro se torna bien importante e interesante una posible generalización del mismo "utilizando letras". Le voy a llamar N al número que colocamos en el casillero central; N representará al número cinco:

4	9	2
3	**5**	7
8	1	6

	N	

N=5

A partir de N, completo el ahora "cuadrado mágico algebraico" y obtengo:

N-1	N+4	N-3
N-2	**N**	N+2
N+3	N-4	N+1

¿Qué pasará con la suma de los números de una misma línea, ahora que tenemos letras?

Sumemos, a modo de ejemplo, las expresiones de la primera fila:

N - 1 + N + 4 + N - 3.

Observamos que al número 4 le restamos 1 y luego 3 por lo que quedamos únicamente con tres letras N, por lo que:

N - 1 + N + 4 + N - 3 = 3N.

Concluimos entonces que, en este caso, la suma de las expresiones de cada línea es el triple del número que se ubique en la casilla central.

Si, como en nuestro cuadrado mágico original, el número central es 5, la suma de los números de cada línea será 15.

Estamos autorizados a cambiar N por el número que se nos ocurra[5], y obtener para cada caso un cuadrado mágico diferente.

Si, por ejemplo, quiero obtener un cuadrado mágico cuya suma sea 780, año de nacimiento de Ibn Musa Al-Khwarizmi, tendré que colocar en el casillero central el número 780/3, es decir el 260.

Obtengo entonces este cuadrado mágico:

259	264	257
258	**260**	262
263	256	261

[5] La letra N se considera ahora como una variable.

El trabajo con las regularidades numéricas, planificado y sostenido a lo largo de la escolaridad, se convierte en un interesante nexo entre la Numeración y el Álgebra. En los primeros años de escolaridad, el alumno trabaja, fundamentalmente, con hechos numéricos donde las relaciones que ocurren se abordan una a una y no en su conjunto. Posteriormente, algunos de estos hechos, al repetirse siempre, se convierten en regularidades y pueden formularse como leyes numéricas. El alumno comienza a acercarse, entonces, a relaciones que se tornarán luego en objeto de estudio.

¿Cuál es el acercamiento que el niño en edad escolar puede tener con esas relaciones, objeto constitutivo del Álgebra?

Considero que la Escuela Primaria puede contribuir, y mucho, con actividades que conduzcan a que los alumnos identifiquen regularidades/patrones, las expliciten y puedan registrarlas.

Señalo un posible "puente" en este mapa, puente que une la Numeración con el Álgebra. Es tarea del maestro construirlo, si lo considera útil, e invitar a sus alumnos a transitarlo.

Bibliografía

ANEP. CEP. República Oriental del Uruguay (2009): *Programa de Educación Inicial y Primaria. Año 2008.*

BABINI, José (1969): *Historia sucinta de la Matemática*. Madrid: Espasa-Calpe S.A.

CAMPOS LINS, Rómulo (2000): "The Production of Meaning for álgebra: a perspective based on a Theoretical Model of Semantic Fields" en R. Sutherland; T. Rojano; A. Bell; R. Campos Lins (eds.): *Perspectives on School Algebra*. Dordrecht/Boston/Londres: Kluwer Academic Publishers.

FRIPP, Ariel (2009a): "¿Álgebra en la escuela primaria?" en Revista *QUEHACER EDUCATIVO*, Nº 93 (Febrero), Edición Especial: *El maestro como constructor de currículo*, pp. 45-50. Montevideo: FUM-TEP.

FRIPP, Ariel (2009b): "Álgebra: aportes para nuevas reflexiones" en Revista *QUEHACER EDUCATIVO*, Nº 94 (Abril), pp. 30-36. Montevideo: FUM-TEP.

KIERAN, Carolyn (1995): "The Learning and Teaching of School Álgebra", Cap. 17 en *una empresa docente*. Traducción resumida hecha por Vilma María Mesa (19/4/95). Bogotá: Universidad de los Andes. En línea: http://dme.ufro.cl/pmat/images/Documentos/aprendizaje%20del%20algebra%20en%20el%20liceo.pdf

KIERAN, Carolyn; FILLOY YAGÜE, Eugenio (1989): "El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica" en *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), pp. 229-240.

MACÍAS GIL, Cristóbal (2004): "Patrones numéricos y cuadrados mágicos: un recurso para investigar en el aula" en *Kikiriki. Cooperación educativa* Nº 73, pp. 64-65. Sevilla.

MARTÍNEZ E., J. Rafael (2004): "Los cuadrados mágicos en el Renacimiento. Matemáticas y Magia Natural en el de Oculta Philosophia de Agrippa" en *Educación Matemática,* Vol. 16, Nº 2, pp. 77-92. México: Santillana.

SADOVSKY, Patricia; SESSA, Carmen (2004): "La interacción adidáctica con los procedimientos de los otros en la transición aritmética álgebra: un *milieu* para la emergencia de nuevas preguntas". (Versión en inglés aceptada en marzo de 2004 para su publicación en 2005 en *Educational Studies in Mathematics*). En línea: http://www.fcen.uba.ar/carreras/cefiec/matem/articulo/ss_2004.doc

SFARD, Anna (1991): "On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin" en *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

TANNERY, Paul; HENRY, Charles (eds.) (1891): *Œuvres de Fermat*. París: Gauthier-Villars.

Webliografía

"Historia de los cuadrados mágicos". En línea: http://www.portalciencia.net/historia.html

"Cuadrados mágicos, instrumentos de cálculo". En línea: http://www.terra.es/personal8/ebarcodi/index.htm

"Un nuevo desafío el sudoku". En línea: http://200.40.120.164/05/08/03/pciuda_166601.asp