



¿Álgebra en la escuela primaria?

Ariel Fripp | Profesor de Matemática. Formador de maestros en Matemática y Didáctica de la Matemática.

«Los números, como todos los objetos de los conocimientos humanos, se pueden considerar en general y en particular, es decir, bajo la relación de sus leyes y bajo la de sus hechos. Por ejemplo, esta proposición: la suma de dos números multiplicada por su diferencia, es igual a la diferencia de sus cuadrados, es una ley de los números, porque se aplica generalmente a todos ellos; mientras que esta: once multiplicado por cinco es igual a cincuenta y cinco, es un hecho de dos números, porque solo se aplica a los números 11, 5 y 55.

Esta distinción divide a la ciencia de los números en dos ramos generales, de los cuales el que trata de leyes, es el álgebra, y el que trata de los hechos es la Aritmética.»¹

En este artículo intentaremos aportar elementos a la discusión sobre la enseñanza del álgebra en la escuela primaria. ¿Es posible? ¿Qué se necesita tener en cuenta para poder enseñarla? ¿Qué aspectos pueden ser abordables? ¿Trabajar álgebra es trabajar “con letras”?...

Contestar todas o algunas de las preguntas anteriores nos sumerge en un desafío que parecería muy grande y costoso para la escuela uruguaya. En este momento de cambios programáticos estamos convencidos de que el maestro no posee un plan de ruta que lo oriente. ¿Cuáles son los mojonos que marcarían esa ruta?

Intentemos delinear algunos de ellos.

Resulta interesante la cita con la que comienza este artículo; en ella se hace referencia a dos cuestiones que subyacen a la tarea matemática: trabajar con hechos o trabajar con leyes.

El niño en edad escolar trabaja, especialmente en sus primeros años, con hechos, para pasar a trabajar en el último nivel de la escolaridad con algunas leyes.

Cuando de álgebra se habla, el maestro uruguayo evoca experiencias liceales donde construyó la idea de que trabajar álgebra es sinónimo de resolver ecuaciones e inecuaciones. Seguramente, la experiencia como alumno, en este terreno, no produce gratos recuerdos, por lo que ahora, al tener que enseñar álgebra, afloran muchos sentimientos de inseguridad.

Enseñar álgebra no es fácil.

Los docentes uruguayos suelen considerar que *cuando se habla de álgebra, de leyes o generalizaciones se está pensando en “usar letras”*.

Por lo tanto, y adhiriéndonos momentáneamente a esta idea arraigada en nuestro magisterio, si se desea trabajar con generalizaciones, indudablemente se deberán considerar los números como letras.

Se intentará, en las líneas que siguen, discutir sobre esta apreciación para demostrar la falsedad de la misma.

Generalizar no exige “trabajar con letras”.

¹ J. M. Vallejo (1841), citado por B. Gómez Alfonso (1995).

Algunas acciones a tener en cuenta al trabajar algebraicamente

Tomando como base los aportes de Molina González (2007), se propone atender las siguientes acciones al momento de enseñar álgebra:

- ▶ Considerar los números como variables e incógnitas antes de la simbolización.
- ▶ Fomentar procesos de generalización, validación y argumentación.
- ▶ Establecer relaciones de tipo funcional.
- ▶ Explicitar (reconocer, desarrollar y usar) hechos aritméticos con características estructurantes.
- ▶ Reubicar el signo de igual. Significados del mismo.
- ▶ Hacer uso del simbolismo algebraico.

Estas acciones hacen al trabajo algebraico en general y fácilmente reconocemos, aun sin profundizarlas, que algunas de ellas no corresponden al ciclo primario.

Entonces nos preguntamos, ¿tiene sentido hablar de Enseñanza del Álgebra en la escuela primaria?²

Se considera más oportuno habilitar escenarios problematizadores que generen exploraciones por parte de los alumnos en algunas cuestiones que hacen al trabajo algebraico. Más que trabajar álgebra en la escuela primaria, deberíamos planificar adecuadas exploraciones de algunas ideas algebraicas.

Explicitar (reconocer, desarrollar y usar) hechos aritméticos con características estructurantes. Fomentar procesos de generalización

Cuando se plantea la expresión $10 + 4$ los alumnos pueden reconocerla como la adición de cuatro unidades a otras diez (acción o proceso de sumarle 4 al 10) o como una forma de expresar la suma de ambos, 14 (objeto).

Aritméticamente buscamos el resultado de sumarle cuatro a diez y garantizamos, como un hecho, que da 14.

¿Dónde se encuentra el álgebra en dicho razonamiento?

El álgebra da sustento al cálculo anterior en el sentido que otorga una estructura que nos permite siempre encontrar un resultado aunque los

números no sean 10 y 4. Si esto no fuera así, trabajar aritméticamente implicaría la memorización de infinitos procedimientos, uno para cada tipo de número, uno para cada nueva relación a establecer.

Es tarea de la aritmética encontrar un resultado mientras que es tarea del álgebra generar una forma estructurada y valedera de encontrar siempre ese resultado.

Podría considerarse entonces que el álgebra sustenta a la aritmética y esta, a su vez, se amplía al ser algebraizada, por lo que podemos establecer que...

...la tarea fundamental del álgebra es la de brindar generalizaciones y, por lo tanto, contribuir a una estructuración matemática.

Históricamente, en nuestro país, como en muchos otros, el alumno transita por una diagramación curricular temporal clásica en la cual, en la escuela primaria, se dedica a trabajar aritméticamente (entiéndase procesualmente) para que en una segunda etapa, en la escuela media, lo haga algebraicamente.

Esta diagramación tiene cierta nota de inocencia al considerar que el simple cambio de niveles educativos podría implicar separación entre formas de pensar en aritmética y formas de pensar en álgebra. Es como si se estuviese afirmando que el pasaje de la escuela al liceo estaría acompañado de la necesaria ruptura entre el trabajo aritmético y el algebraico: el niño hace aritmética; el adolescente, álgebra. En este sentido, dicha concepción contribuye a que los objetos aritméticos solamente “vivan” en la escuela; y los algebraicos, en el liceo. Posición esta que podría vincularse con algunos estudios teóricos sobre la especificidad que adquieren los objetos matemáticos según las instituciones donde se despliegan (Y. Chevallard, 1990).

Si nos centramos en que el álgebra sustenta el trabajo aritmético, si nos centramos en que el álgebra subyace implícitamente en las relaciones de tipo aritmético que la escuela fomenta, entonces será responsabilidad del maestro la

² Se corre el riesgo de titular en forma “muy pomposa” ciertas actividades como propuestas de álgebra cuando solo poseen cierto sesgo algebraico. Sería lo mismo que afirmar que la Escuela Primaria aborda el Conjunto de los Números Enteros Negativos por el solo hecho de utilizarlos para expresar algunas temperaturas por debajo de 0 °C.

explicitación, en la medida de lo posible, de estos sustentos algebraicos.

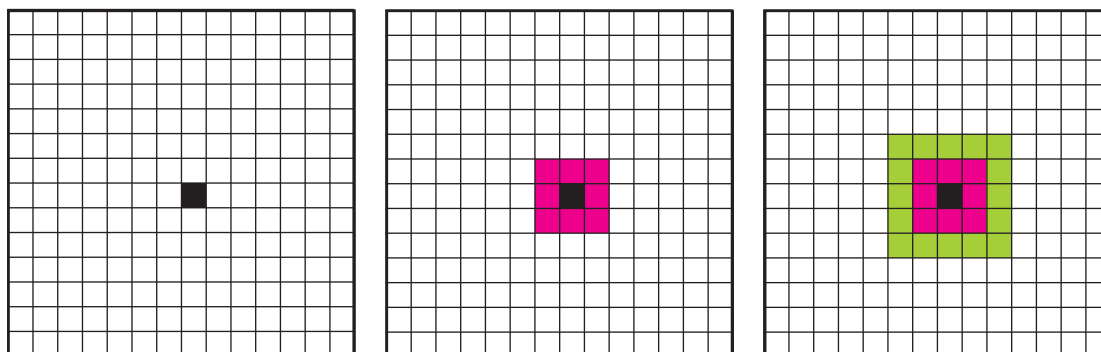
Pero ¿cómo podemos explicitar las relaciones algebraicas en la escuela?

Una posibilidad es hacerlo a través de generalizaciones.

Cuando se generaliza, se abstrae aquello que es común y esencial a muchas cosas, y se lo comunica de forma tal que lo enunciado sea valedero para cada una de esas cosas y, por lo tanto, para todas ellas.

Algunos ejemplos que implican generalizaciones

1. Marcela tiene dibujado un cuadrado en una hoja de papel centimetrado y comienza a pintar alrededor de él como muestran estas figuras:

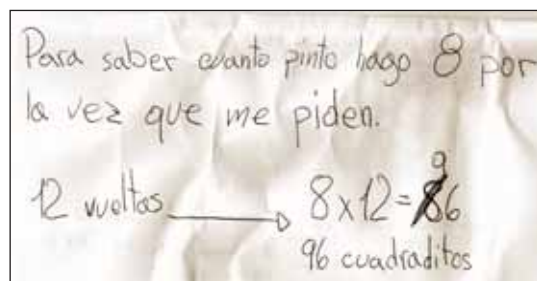


Si tienes en cuenta el trabajo que está haciendo Marcela, podrás completar esta tabla.

1ª "vuelta"	Pinta 8 cuadraditos
2ª "vuelta"	Pinta 16 cuadraditos
3ª "vuelta"	Pinta... cuadraditos
4ª "vuelta"	Pinta... cuadraditos
5ª "vuelta"	

¿Cuántos cuadraditos pintará Marcela en la vuelta número 20?

Escribe una "regla" que explique cómo haces para encontrar siempre la cantidad de cuadraditos que se pintan en cada "vuelta". Esta actividad es de generalización, ya que ella exige a los alumnos encontrar lo que es común y esencial a la cantidad de cuadraditos pintados en cada una de las vueltas. La estructura algebraica que sustenta esta actividad permite establecer, como lo expresa una alumna de 5º año, que...



Este enunciado da cuenta efectivamente de una "regla" para encontrar siempre la cantidad de cuadraditos en cada vuelta. En este caso, los números funcionan como variables.

«[...] los chicos "manejan" ciertas leyes (por ejemplo la conmutativa para la adición de naturales) sin que vean la necesidad de expresarla mediante el uso de variables. Como vimos (...) cuando los chicos dicen "vale la propiedad conmutativa porque, por ejemplo, $2+3 = 3+2$ ", no piensan en ese único ejemplo sino que utilizan ese ejemplo con un carácter general. En tanto la ley general puede expresarse a través de ejemplos, estos ejemplos representan la ley y dejan sin sentido la necesidad de apelar a las letras para representar "un número cualquiera".»³

Veamos la posible fórmula expresada utilizando simbología algebraica:

C = cantidad de cuadraditos en cada vuelta

V = N° de vuelta

$C = 8 \times V$

¿En qué se diferencian y en qué se asemejan lo expresado antes por la alumna y esta fórmula?

En ambos casos, los números ofician como variables⁴; en ambos casos, los enunciados habilitan a una conclusión general, aplicable a cualquier cantidad de vueltas a partir de una vuelta inicial.

³ M. Panizza; P. Sadovsky; C. Sessa (1995:5-6).

⁴ Cuestión bastante interesante, ya que usualmente se suele identificar a las letras con incógnitas, es decir, con números desconocidos que hay que hallar. En este caso, V no está indicando un número desconocido, sino un conjunto infinito de números.

La única diferencia entre ambas resoluciones radica en la utilización o no de simbología.

«[...] sabemos los graves riesgos que se corren cuando se privilegia en forma casi exclusiva la realización de rutinas algebraicas de un modo abstracto desde el inicio del tema. Algunos de estos riesgos pueden ser: los alumnos pierden pie, no saben por qué hacen lo que hacen ni para qué les sirve, comienzan así a manipular signos que para ellos no tienen sentido y van progresivamente generando una actitud muy negativa hacia el álgebra. Cuando esto sucede, los estudiantes se sienten desbordados, llegan a la conclusión de que el álgebra no es para ellos y suspenden su razonamiento en esta área. Sabemos que esto no ocurre con todos los alumnos pero sí con un porcentaje importante de ellos. Es por esto que los profesores debemos focalizar nuestro esfuerzo para que todos nuestros alumnos puedan **apreciar y usar la potencia del álgebra** como herramienta en la resolución de problemas.

El alto nivel de abstracción del lenguaje algebraico es la causa de las dificultades señaladas, pero, paradójicamente, aun siendo el motivo que ocasiona tanta dificultad, es al mismo tiempo el que hace a este lenguaje tan valioso.»⁵

Decíamos, al comienzo del artículo, que intentaríamos marcar algunos mojones en el camino que el maestro uruguayo transitará en la enseñanza de algunas cuestiones algebraicas.

Uno de estos mojones podría estar constituido por el hecho de reconocer que el trabajo escolar debería centrarse en posibilitar que los alumnos expliciten reglas generales al resolver situaciones problemáticas en contextos aritméticos o geométricos. Esto no contradice el hecho de poder llegar a utilizar simbología algebraica, pero no debería ser el objetivo inicial.

PRIMER MOJÓN EN EL TRABAJO ALGEBRAICO: habilitar a los alumnos a explicitar reglas generales al resolver situaciones problemáticas en contextos aritméticos o geométricos.

Pretender introducir tempranamente la notación podría estar acompañado de un inicio al trabajo algebraico, carente de sentido para el alumno, y de prácticas de enseñanza, por parte del maestro, que desvirtúen el objeto de saber.

Acompañamos las palabras de Fripp, Gaione y Vilaró (1998:53), «una presentación que atienda especialmente la sintaxis y descuide la semántica, corre el riesgo de generar una manipulación sin sentido».

2. Utilizando tu calculadora, completa la siguiente tabla:

Potencias de base dos ⁶	Valor de cada potencia
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	
2^6	
2^7	
2^8	
2^9	
2^{10}	

- Marcos dice que si encuentra el valor de 2^{12} , dicho valor “termina” en seis. Explica, por escrito, si lo que plantea Marcos es cierto o no.
- Sin calcularlo, ¿puedes decir en qué cifra terminará el valor de 2^{13} ? ¿y el de 2^{15} ? Explica, por escrito, cómo hiciste para encontrar las respuestas a las preguntas anteriores.

En esta actividad se puede observar que la expresión $2^{12} = 4096$ es un hecho aritmético, pero la conclusión: “la cifra de las unidades del valor de toda potencia de dos cuyo exponente sea un múltiplo de cuatro⁷ es siempre 6”, es una ley y, por lo tanto, una generalización que estructura los cálculos con estas potencias particulares.

Nuevamente hemos planteado otro ejemplo donde la generalización no exige la utilización de “letras”.

SEGUNDO MOJÓN A TENER EN CUENTA: abordar actividades algebraicas en la escuela primaria no exige la utilización de “letras”.

⁵ A. Fripp; C. Gaione; M. Vilaró (1998:53).

⁶ Se excluye la potencia de exponente cero.

⁷ Diferente de cero.

En el primer ejemplo presentado pudo observarse que la actividad habilitó a encontrar una forma para contar la cantidad de elementos de una colección (cantidad de cuadraditos en cada “vuelta”) mientras que el segundo ejemplo permitió la formulación de una regularidad numérica. Otros niveles educativos podrán habilitar al alumno a buscar validaciones que no sean empíricas.

Es en este sentido que Carmen Sessa (2005:72) reconoce⁸: «En (...) la generalización como vía de entrada al álgebra, identificamos dos zonas de trabajo que involucran lo algebraico desde aspectos un tanto diferentes:

1. la producción de fórmulas para contar colecciones
2. la formulación y validación de conjeturas sobre los números y las operaciones.»

Detengámonos un instante en el primer aspecto planteado por Sessa: la producción de fórmulas para contar colecciones y tomemos un ejemplo citado por la autora (2005:98):

«El cálculo de la cantidad de diagonales de un polígono de n lados. [...]

Hay varias maneras de pensar este problema, por ejemplo:

- *Cada vértice “hace diagonal” con todos los que no son sus vecinos. Esto significa que cada vértice forma diagonal con $n - 3$ vértices. Como hay n vértices, tendríamos la fórmula $n(n - 3)$. Pero como dos puntos determinan una única diagonal t así lo estaríamos contando dos veces, la fórmula es $\frac{1}{2} n(n - 3)$.*
- *Cada vértice se asocia con todos los otros, lo cual da $\frac{1}{2} n(n - 1)$ segmentos distintos con extremos en los vértices. Pero dos vértices contiguos determinan un lado, no una diagonal. Por eso hay que restarle la cantidad n de lados. La fórmula que se obtiene es $\frac{1}{2} n(n - 1) - n$ »*

En todo momento, la autora reflexiona sobre lo que produciría un alumno en edad liceal, no hace el planteo pensando en un alumno en edad escolar.

Hagámoslo nosotros entonces.

La producción de fórmulas para contar colecciones debe entenderse como una necesidad planteada por un problema y como una elaboración realizada por el alumno.



Foto: Concurso fotográfico QE / Natalia Laborite

La fórmula para el cálculo de diagonales de un polígono es una fórmula que ha “seducido” desde siempre al magisterio uruguayo, pero que en la mayoría de los casos no es producida por los alumnos. Sí es cierto que, una vez presentada, los alumnos logran entenderla.

Cabe cuestionar, entonces, nuestra intención: ¿que “entiendan álgebra” o que “comiencen a pensar algebraicamente”? La primera intención hace a una propuesta casi platónica, en la cual el objeto algebraico tendría una existencia ajena y externa a los alumnos, razón por la cual el maestro les muestra, por ejemplo, las fórmulas para que ellos las “contemplan” y las entiendan.

La segunda concepción se afilia a hacer álgebra con un sentido más directo, el de fabricar o producir: es el alumno quien en contacto con el problema establece relaciones de tipo algebraico entre los datos, para así responder al problema.

¿Cómo valida un alumno, en edad escolar, que la cantidad de diagonales encontrada es verdadera? No tiene otra forma que hacerlo empíricamente, con lo cual se pierde el potencial de la herramienta algebraica.

«Gran parte del poder tradicional del álgebra se sustenta en las operaciones lógicas internas libres de referentes que permite su uso (...) No obstante, como ya hemos mencionado, ni los formalismos ni las acciones que sobre

⁸ Haciendo referencia al trabajo algebraico en la Enseñanza Media.

ellos se llevan a cabo pueden aprenderse de una forma viable sin tener en cuenta un punto de partida semántico donde los formalismos se toman inicialmente para representar algún episodio de la experiencia del estudiante y, aún más, esta relación referencial queda mejor anclada en el acto de generalización desde la semántica del dominio representado por el formalismo.»⁹

¿Cómo validaría un alumno que la cantidad de cuadraditos en la vuelta N° 15 no puede ser 121? La regla producida en dicho caso le alcanza para decir que 121 no es igual a 15×8 , por lo tanto, en la vuelta N° 15 no hay 121 cuadraditos sino 120.

Por esta razón es que necesitamos estar atentos; al producir fórmulas, el alumno necesariamente, debe construirle sentido a las mismas.

«Hoy en día el álgebra no es meramente “dar significado a los símbolos” sino otro nivel

más allá de eso, que tiene que ver con aquellos modos de pensamiento que son esencialmente algebraicos –por ejemplo, manejar lo todavía desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular. Ser consciente de esos procesos, y controlarlos, es lo que significa pensar algebraicamente.»¹⁰

La escuela uruguaya está dando un paso importante, incorpora el álgebra en su nueva propuesta programática.

Se supone que esta inclusión responde al estudio de lo que aportan las investigaciones sobre este tema.

Se supone, también, que se ha tenido en cuenta el trabajo algebraico y ha sido incorporado a los programas que integran la Formación Inicial de Maestros y a las acciones de la Formación en Servicio que promueve el CEP.

De no ser así, ¿qué se está esperando? ☹

Bibliografía

CHEVALLARD, Yves (1990): *Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel*. IREM d'Aix-Marseille: Faculté des Sciences de Luminy.

FRIPP, Ariel; GAIONE, Claudia; VILARÓ, Mónica (1998): “Expresiones algebraicas”, Unidad 2 en *Matemática. Guía de Apoyo al Docente. Segundo curso*. Montevideo: ANEP.

GÓMEZ ALFONSO, Bernardo (1995): “Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa” en *Revista Suma. Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, N° 20, pp. 61-68.

KAPUT, James J. (1996): “¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra?” en *UNO. Didáctica de las Matemáticas*, N° 9 (Julio, Agosto, Setiembre): “El futuro del álgebra y de la aritmética”. Barcelona: Ed. Graó.

KIERAN, Carolyn; FILLOY YAGÜE, Eugenio (1989): “El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica” en *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), pp. 229-240.

MOLINA GONZÁLEZ, Marta (2007): “Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria”. Tesis doctoral. Directores de la Tesis: Encarnación Castro Martínez; Enrique Castro Martínez. Granada: Universidad de Granada. En línea: <http://documat.unirioja.es/ser-vlet/tesis?codigo=1210>

PANIZZA, Mabel; SADOVSKY, Patricia; SESSA, Carmen (1995): “Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de Matemática. Informe sobre una investigación en marcha”. Trabajo presentado en la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina (octubre de 1995), Río Cuarto, Argentina.

SESSA, Carmen (2005): *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

⁹ J. J. Kaput (1996), citado por A. Fripp; C. Gaione; M. Vilaró (1998).

¹⁰ E. Love (1986:49), citado por Kieran (1989).