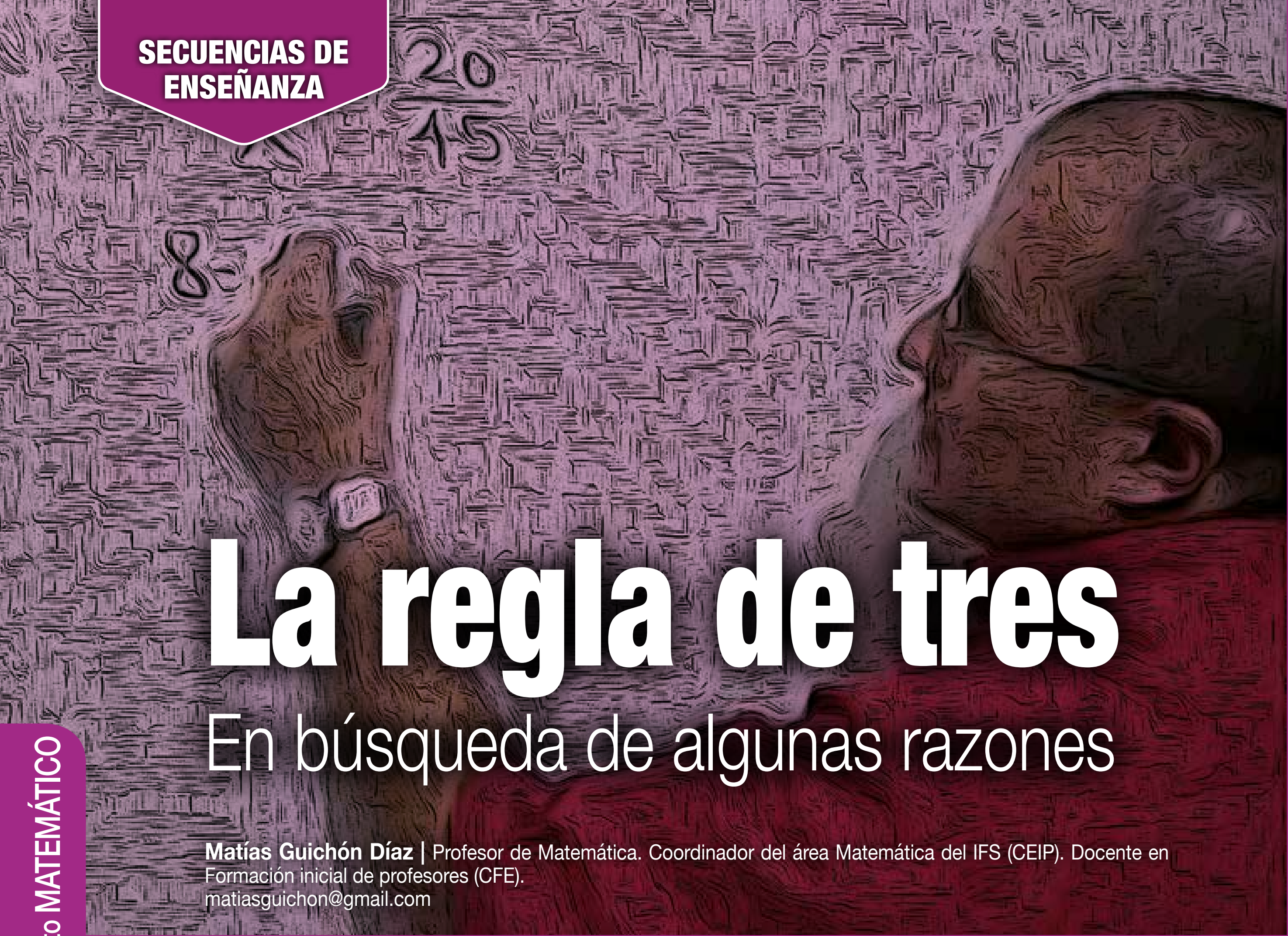

La regla de tres

En búsqueda de algunas razones

Matías Guichón Díaz | Profesor de Matemática. Coordinador del área Matemática del IFS (CEIP). Docente en Formación inicial de profesores (CFE).
matiasguichon@gmail.com

«...los problemas de regla de tres son problemas de proporcionalidad directa en los que se da un par de elementos que se relacionan y se pide hallar el correspondiente de otro elemento. No hay nada que justifique su tratamiento separado de la proporcionalidad...»

Panizza y Sadovsky (1991)

Introducción

La regla de tres tiene estatus de "procedimiento experto" para resolver determinadas actividades. Es ejecutada de forma mecánica por muchos alumnos escolares y, en la mayoría de los casos, con escasa comprensión. Pero ¿qué justifica su funcionamiento? ¿Se pueden resolver estas actividades apelando a otros procedimientos? ¿Cómo abordar el trabajo con estas actividades en la escuela?

En este artículo nos proponemos abordar algunas cuestiones matemáticas involucradas en las actividades habitualmente (mal) llamadas *"problemas de regla de tres"*, e intentaremos justificar el funcionamiento de este algoritmo. Presentaremos un conjunto de actividades para abordar este procedimiento, y el vínculo entre la regla de tres y la proporcionalidad directa.

Comencemos nuestra discusión con una actividad clásica.

Actividad

Para comprar 20 caramelos, la mamá de Nacho gastó $ 60:

(a) Si quiere comprar 12 caramelos, ¿cuánto dinero necesita?

(b) ¿Cuántos caramelos puede comprar con $ 75?

Resolución "por regla de tres"

En primer lugar planteamos las clásicas resoluciones de esta actividad utilizando regla de tres.

(a) Si quiere comprar 12 caramelos, ¿cuánto dinero necesita?	(b) ¿Cuántos caramelos puede comprar con $ 75?
Resolución: El planteo de la regla de tres que permite calcular cuánto dinero es necesario para comprar 12 caramelos es el siguiente: 20 caramelos ——— $ 60 12 caramelos ——— x A partir de este planteo, el cálculo para averiguar el valor de x es: $x = \frac{12 \times 60}{20} = 36$ Entonces "para comprar 12 caramelos son necesarios $ 36".	**Resolución:** Similar al caso anterior, el planteo de la regla de tres que permite calcular la cantidad de caramelos en este caso es el siguiente: 20 caramelos ——— $ 60 x ——— $ 75 A partir de este planteo, el cálculo para averiguar el valor de x es: $x = \frac{75 \times 20}{60} = 25$ Entonces "con $ 75 se pueden comprar 25 caramelos".

Como el lector sabrá, para "ejecutar" la regla de tres es necesario recordar "ubicar iguales unidades en la misma columna", multiplicar cruzado, y otros clichés que, en general, se memorizan para utilizar dicha regla. Analicemos ahora otras formas de realizar estos mismos cálculos.

Otros procedimientos

(a) Si quiere comprar 12 caramelos, ¿cuánto dinero necesita?	(b) ¿Cuántos caramelos puede comprar con $ 75?
Procedimiento 1 Como 20 caramelos cuestan $ 60, entonces cada caramelo cuesta $ 3 (que es 60 : 20). Y si cada caramelo cuesta $ 3, entonces para comprar 12 caramelos, la madre de Nacho necesita $ 12 x 3 = $ 36.	**Procedimiento 4** Como 20 caramelos cuestan $ 60, entonces cada caramelo cuesta $ 3 (que es 60 : 20). Y si cada caramelo cuesta $ 3 entonces para saber cuántos caramelos puede comprar con $ 75 hay que averiguar cuántas veces entra el 3 en 75, o sea, dividir 75 : 3 que da 25 caramelos.
Procedimiento 2 Como 12 caramelos es el 60% de 20 caramelos, y 20 caramelos cuestan $ 60, entonces 12 caramelos cuestan el 60% de $ 60 que es $ 36.	**Procedimiento 5** Como $ 75 es igual a una vez y un cuarto de $ 60, entonces la cantidad de caramelos es una vez y un cuarto de 20. Y como 1/4 de 20 es 5, entonces son 25 caramelos.
Procedimiento 3 Como 20 caramelos cuestan $ 60, entonces: - 10 caramelos cuestan $ 30 (la mitad de 60) - 2 caramelos cuestan $ 6 (la quinta parte de 30) Entonces para comprar 12 caramelos que es 10 + 2 se necesita $ 30 + $ 6, o sea, $ 36.	**Procedimiento 6** Con $ 60 alcanza para comprar 20 caramelos. Con $ 30 que es la mitad alcanza para 10 caramelos. Con $ 15 que es la mitad de $ 30 alcanza para comprar 5 caramelos que es la mitad de 10. Entonces con $ 75 que es $ 60 + $ 15 alcanza para comprar 25 caramelos porque 25 = 20 + 5.

Como se puede observar, los procedimientos anteriores permiten obtener los mismos resultados que la regla de tres. Pero ¿qué relación existe entre estas resoluciones y la regla de tres? Analicemos ahora las propiedades y relaciones que "se tejen" en esta actividad, y procuremos establecer vínculos entre los procedimientos anteriores y la regla de tres. A partir de ello intentemos justificar "el funcionamiento" de la misma.

Proporcionalidad directa y algunas propiedades

En la actividad que venimos discutiendo, los números representan caramelos o pesos. La relación que existe entre "la cantidad de caramelos" y "la cantidad de dinero" viene dada por la siguiente igualdad:

$$caramelos \times 3 = dinero$$

Decimos que ***"la cantidad de caramelos y el dinero a pagar por ellos son directamente proporcionales"***, y la constante de proporcionalidad es 3. En este caso, la constante de proporcionalidad no es un número sin unidad, ya que el 3 representa el dinero a pagar por cada caramelo. Entonces la constante en este caso es "tres pesos por cada caramelo" o "$ 3 por caramelo". Observemos que el valor de esta constante no está dicho explícitamente en la actividad, sino que se deduce de la oración *"Para comprar 20 caramelos, la mamá de Nacho gastó $ 60"*.

Por otra parte, observemos que la igualdad $caramelos \times 3 = dinero$ puede ser escrita en la forma $caramelos = dinero \div 3$. Estas igualdades ofrecen formas de calcular la cantidad de caramelos o la cantidad de dinero, una vez obtenida la constante de proporcionalidad:

- Conocida la constante "$ 3 por caramelo" y conocida una cantidad de caramelos, la igualdad $caramelos \times 3 = dinero$ permite calcular el dinero a pagar "multiplicando por 3 la cantidad de caramelos". Por ejemplo, en el apartado (a) de la actividad para calcular el costo de 12 caramelos, se puede multiplicar 12 x 3.

- Conocida la constante "$ 3 por caramelo" y conocida una cantidad de dinero, la igualdad $caramelos = dinero \div 3$ permite calcular la cantidad de caramelos a comprar "dividiendo el dinero entre 3". Por ejemplo, en el apartado (b) de la actividad para calcular cuántos caramelos se pueden comprar con $ 75, se puede dividir 75 : 3.

Esto que describimos anteriormente es parte de lo que se pone en juego en los anteriores procedimientos 1 y 4. Observemos ahora que la idea de multiplicar o dividir por la constante 3 (según queramos averiguar costo o cantidad de caramelos respectivamente) también subyace a la **regla de tres**. Veamos esto:

(a) Si quiere comprar 12 caramelos, ¿cuánto dinero necesita?	(b) ¿Cuántos caramelos puede comprar con $ 75?
El procedimiento a partir de la regla de tres es el siguiente: 20 caramelos ——— $ 60 12 caramelos ——— x $x = \dfrac{12 \times 60}{20} = 36$ Ahora, podemos escribir la última igualdad como sigue: $x = \dfrac{12 \times 60}{20} = 12 \times \dfrac{60}{20} = 12\ caramelos \times 3$ que coincide con "el costo es el triple de la cantidad de caramelos" ya discutido antes, y expresado por la igualdad: $caramelos \times 3 = dinero$	En este caso, el procedimiento a partir de la regla de tres es el siguiente: 20 caramelos ——— $ 60 x ——— $ 75 $x = \dfrac{75 \times 20}{60} = 25$ Pero podemos escribir la última igualdad como sigue: $x = \dfrac{75 \times 20}{60} = 75 \times \dfrac{20}{60} = \dfrac{75}{60/20} = \$75 \div 3$ que coincide con "la cantidad de caramelos es la tercera parte del dinero" que escribimos mediante la igualdad: $caramelos = dinero \div 3$

A partir de la igualdad $caramelos \times 3 = dinero$ podemos construir una tabla de valores, y a partir de ella obtener algunas conclusiones. Según esta igualdad, "el dinero a pagar por los caramelos es el triple de la cantidad de caramelos", lo que nos permite pensar en una tabla de valores similar a "la tabla del 3" como la siguiente:

Caramelos	20	10	60	70
Dinero	60	30	180	210

A partir de estos valores podemos realizar algunas observaciones:

(1) Al multiplicar (o dividir) la cantidad de caramelos por un cierto número, también se multiplica (o divide) la cantidad de dinero por ese mismo número (**linealidad**).
(2) Al sumar (o restar) dos cantidades de caramelos, se suman (o restan) también las correspondientes cantidades de dinero (**aditividad**).
(3) La razón entre valores correspondientes (caramelos y dinero) es constante.

Desarrollemos estas ideas:

(1) Al multiplicar (o dividir) la cantidad de caramelos por un cierto número, también se multiplica (o divide) la cantidad de dinero por ese mismo número (*linealidad*)

En la tabla incluimos un par de valores correspondientes que vienen dados en la actividad: 20 caramelos cuestan $ 60. Los restantes valores pueden obtenerse a partir de estos "multiplicando o dividiendo por un número". Así, por ejemplo, 10 caramelos es la mitad de 20 caramelos, y el costo correspondiente es la mitad de $ 60. De forma similar, 60 caramelos es el triple de 20 caramelos, y el precio correspondiente a 60 caramelos es el triple de $ 60. Esto se puede ver en la siguiente tabla:

÷ 2 × 3

Caramelos	20	10	60	70
Dinero	60	30	180	210

÷ 2 × 3

De igual forma, el 70 y el 210 se pueden obtener, por ejemplo, multiplicando 10 caramelos y $ 30 por 7.

Esta propiedad respalda parte de los **procedimientos 2**, **3**, **5** y **6**, como podremos ver a continuación:

Procedimiento 2

Decir que 12 caramelos es el 60% de 20 caramelos, es lo mismo que decir "12 caramelos = 0,6 x 20 caramelos". Entonces 12 caramelos cuestan el 60% de $ 60 que es $ 36 o, lo que es lo mismo, "la cantidad de dinero necesaria para comprar 12 caramelos es $ 60 x 0,6 = $ 36".

En este caso se multiplica la cantidad de caramelos y la cantidad de dinero por 0,6.

La siguiente tabla de valores puede ayudar a aclarar esto:

× 0,6

Caramelos	20	12
Dinero	60	36

× 0,6

Procedimiento 3

Como 20 caramelos cuestan $ 60, entonces:

- 10 caramelos cuestan $ 30 (la mitad de 60).
- 2 caramelos cuestan $ 6 (la quinta parte de 30).

En este caso se divide la cantidad de caramelos y la cantidad de dinero entre 2 y luego entre 5.

Procedimiento 5

Como $ 75 = 1¼ x $ 60 ⇒ la cantidad de caramelos es 1¼ x 20 = 25.

En este caso se multiplica la cantidad de caramelos y la cantidad de dinero por 1¼.

La siguiente tabla de valores puede ayudar a aclarar esto:

× 1¼

Caramelos	20	25
Dinero	60	75

× 1¼

Procedimiento 6

Con $ 60 alcanza para comprar 20 caramelos, entonces:

- Con $ 30 que es la mitad alcanza para 10 caramelos.
- Con $ 15 que es la mitad de $ 30 alcanza para comprar 5 caramelos que es la mitad de 10.

En este caso se divide la cantidad de caramelos y la cantidad de dinero entre 2, en forma sucesiva, es decir que se divide una vez entre 2 y luego otra vez entre 2.

Cabe destacar que en estos procedimientos se pone en juego la propiedad que venimos discutiendo pero no de cualquier forma, sino que se multiplica o divide por algún número convenientemente elegido. Así, si bien es válido multiplicar o dividir ambas cantidades por cualquier valor, se multiplican o dividen teniendo en cuenta a qué cantidades de dinero o de caramelos se pretende llegar. Véase, por ejemplo, en el primer caso, que la multiplicación por 0,6 no parece tan cómoda, pero permite calcular la cantidad de caramelos y dinero buscada, mientras que otros valores no permitirían hacerlo.

Un **caso particular** de esta propiedad es lo que se llama comúnmente *«método de reducción a la unidad»* (Baldor, 1985:523). Esto consiste en transformar ya sea la cantidad de caramelos o la cantidad de dinero en 1, dividiendo convenientemente: así, por ejemplo, como 20 caramelos cuestan $ 60 entonces (dividiendo todo entre 20) "1 caramelo cuesta $ 60 : 20 = $ 3" y se obtiene la constante de proporcionalidad. También podría dividirse todo entre 60 lo que da lugar a "con $ 1 se puede comprar 20 : 60 = 1/3 de caramelo".

Esta misma propiedad permite establecer relaciones entre pares de columnas de la tabla, veamos esto con un par de ellas:

Caramelos	10	60
Dinero	30	180

En línea con lo que venimos discutiendo podemos observar que la columna del 60 y el 180 es un séxtuplo de la columna del 10 y el 30. Además de poder expresar esto utilizando multiplicaciones, podemos expresarlo utilizando razones de la siguiente forma:

$$\frac{\$\,60}{\$\,10} = 6 \quad \text{y} \quad \frac{\textit{180 caramelos}}{\textit{30 caramelos}} = 6$$

Pero como estas razones son iguales podemos escribir también:

$$\frac{\$\,60}{\$\,10} = \frac{\textit{180 caramelos}}{\textit{30 caramelos}}$$

Esta igualdad entre razones nos permite una nueva mirada sobre la **regla de tres**, y nuevamente intentar justificar su funcionamiento:

A partir de la regla de tres

$$\begin{array}{lcr} \text{20 caramelos} & \text{———} & \$\,60 \\ \text{12 caramelos} & \text{———} & x \end{array}$$

y poniendo en juego esta igualdad entre razones, podemos plantear entonces la igualdad

$$\frac{\textit{12 caramelos}}{\textit{20 caramelos}} = \frac{\$\,x}{\$\,60}$$

o lo que es lo mismo

$$0{,}6 = \frac{\$\,x}{\$\,60}$$

Esta igualdad expresa que la misma relación que existe entre las cantidades de caramelos (el 12 es 0,6 veces el 20) debe existir entre los precios (entonces el precio buscado será 0,6 veces 60). A partir de la misma es posible despejar el valor de x haciendo:

$$x = \frac{\textit{12 caramelos}}{\textit{20 caramelos}} \times \$\,60 = \frac{12 \times 60}{20}$$

que coincide una vez más con el cálculo de la regla de tres[1].

(2) Al sumar (o restar) dos cantidades de caramelos, se suman (o restan) también las correspondientes cantidades de dinero (*aditividad*)

En la tabla de valores incluimos los valores "70 caramelos" que se corresponden con "$ 210". Una forma de obtener este resultado es la siguiente:

$$\begin{array}{r} \textit{10 caramelos cuestan \$ \ \ 30} \\ +\ \textit{60 caramelos cuestan \$ 180} \\ \hline \textit{70 caramelos cuestan \$ 210} \end{array}$$

Es decir que al sumar cantidades de caramelos, se suman sus correspondientes costos. Esto parece bastante evidente: en efecto, imaginemos que compramos

1 Esta forma de resolver es llamada *«método de las proporciones»* (Baldor, 1985:524).

una bolsa que contiene 10 caramelos y cuesta \$ 30, al otro día compramos una bolsa de 60 caramelos que cuesta \$ 180, en total compramos 70 = 10 + 60 caramelos, y gastamos \$ 210 = \$ 30 + \$ 180 que equivale al costo de una bolsa de 70 caramelos. Esta propiedad fundamenta los **procedimientos 3** y **6**:

Procedimiento 3

Como 20 caramelos cuestan \$ 60, entonces:

- 10 caramelos cuestan \$ 30 (la mitad de 60).
- 2 caramelos cuestan \$ 6 (la quinta parte de 30).

Entonces para comprar 12 caramelos que es 10 + 2 se necesitan \$ 30 + \$ 6, o sea, \$ 36.

Procedimiento 6

Con \$ 60 alcanza para comprar 20 caramelos.

Con \$ 30 que es la mitad alcanza para 10 caramelos. Con \$ 15 que es la mitad de \$ 30 alcanza para comprar 5 caramelos que es la mitad de 10.

Entonces con \$ 75 que es \$ 60 + \$ 15 alcanza para comprar 25 caramelos porque 25 = 20 + 5.

(3) La razón entre valores correspondientes (caramelos y dinero) es constante

A partir de la tabla de valores también puede observarse que las razones del tipo $\dfrac{dinero}{caramelos}$ (y al revés) son constantes. Si a la tabla anterior le agregamos una fila donde se incluya esto, la tabla se vería de esta forma:

Caramelos	20	10	60	70
Dinero	60	30	180	210
Dinero ÷ caramelos	$60 \div 20 = 3$	$30 \div 10 = 3$	$180 \div 60 = 3$	$210 \div 70 = 3$

Como se observa a partir de esta tabla "aumentada", la razón $\dfrac{dinero}{caramelos}$ coincide con el valor de la constante, lo que se deduce a partir de la igualdad $caramelos \times 3 = dinero$ que ya discutimos.

Este otro punto de vista permite realizar una nueva justificación del "funcionamiento" de la **regla de tres**. Veámoslo en uno de los casos anteriores:

Para responder la cantidad de dinero a pagar por 12 caramelos, el planteo que hicimos fue el siguiente:

$$\begin{array}{lcl} 20 \text{ caramelos} & \text{———} & \$\ 60 \\ 12 \text{ caramelos} & \text{———} & x \end{array}$$

Esta igualdad de razones permite plantear la igualdad $\dfrac{60}{20} = \dfrac{x}{12}$

lo que comúnmente se lee como "60 es a 20 como x es a 12". La igualdad expresa que la misma relación que existe entre el 60 y el 20 (uno triple del otro) debe existir entre el valor desconocido x y el 12. A partir de la misma es posible despejar el valor de x haciendo

$$\frac{60}{20} \times 12 = x$$

que coincide con la "fórmula" de la regla de tres. De este modo tenemos un nuevo argumento para justificar el funcionamiento de la regla de tres.

Área del Conocimiento MATEMÁTICO

Una posible secuencia de enseñanza

Con la discusión anterior nos propusimos revisar algunos argumentos que fundamentan el funcionamiento de la regla de tres como procedimiento de cálculo, en situaciones de proporcionalidad directa. A continuación presentaremos algunas actividades para abordar el trabajo con la proporcionalidad directa, y el vínculo entre la regla de tres y la proporcionalidad.

Actividad 1:

Para comprar 20 caramelos, la mamá de Nacho gastó $ 60:

(a) Si quiere comprar 12 caramelos, ¿cuánto dinero necesita?
(b) ¿Cuántos caramelos puede comprar con $ 75?

Comentarios:

Esta es la actividad analizada al principio del artículo. Podría dar lugar a diferentes formas de resolver (ya analizadas). A partir de ella es posible discutir, por ejemplo, la utilidad de conocer cuánto cuesta cada caramelo para poder calcular las cantidades solicitadas.

Actividad 2:

Seba compró 4 alfajores en la cantina de la escuela y pagó $ 32. Con sus amigos quieren saber cuánto pagará cada uno por sus bizcochos y cuántos pueden comprar con el dinero que tienen. ¿Puedes ayudarlos?

	Martín	Clara	Agustina	Nico
Bizcochos	2	6		
Dinero			$ 24	$ 40

Comentarios:

Esta actividad es similar a la anterior. La tabla (que podría ser más grande) se incluye para exigirles a los alumnos que sistematicen una forma rápida de calcular. La discusión a propósito de estas formas de cálculo podría ayudarles a los alumnos a ir elaborando reglas de cálculo, válidas en las situaciones de proporcionalidad directa.

Actividad 3:

El papá de Santi hace mermelada casera. Ya sabe que con 2 kg de azúcar puede hacer 5 bollones de mermelada. Hoy antes de cocinar se fijó en cuántos kilos de azúcar tenía guardados. Ayudalo a pensar cuántos bollones de mermelada podrá hacer.

Comentarios:

En esta actividad falta un dato. Si se incluyera la cantidad de azúcar guardada que tiene el papá de Santi, la misma sería igual a la Actividad 1. La falta de este dato les exige a los alumnos (que podrían probar con cantidades de azúcar) a formular una regla de cálculo, independiente de la cantidad de azúcar. Una posible regla puede ser "para averiguar los bollones que puede hacer, tiene que multiplicar los kilos de azúcar por 2,5".

Actividad 4:

En un anuncio de autos, Martina y Carmela leen "gasta 8 litros de nafta en 100 kilómetros". Quieren averiguar cuántos kilómetros podrá moverse el auto con 5 litros de nafta.

Martina dice "multiplico 5 x 100 y lo que da lo divido entre 8". Carmela le dice "no, tenés que dividir 100 entre 8, y lo que da multiplicarlo por 5". ¿Quién tiene razón?

Comentarios:

Esta actividad pretende poner a discutir la relación entre dos procedimientos: el procedimiento que implica calcular la unidad (en este caso, los kilómetros por cada litro de nafta) y el procedimiento "regla de tres" ($\frac{5 \times 100}{8}$).

Esto permitirá discutir algunas razones por las que funciona esta regla.

Actividad 5:

En el almacén de mi barrio venden bolsitas con diferentes cantidades de caramelos. Por cada bolsita, el almacenero cobra $ 5, más el dinero correspondiente a los caramelos. La mamá de Nacho gastó $ 65 en una bolsita de 20 caramelos, ¿cuánto cuesta una bolsita de 12 caramelos?

Comentarios:

En este caso, la cantidad de caramelos y la cantidad de dinero a pagar no son directamente proporcionales, por lo que no es posible resolver apelando a los procedimientos discutidos anteriormente. La igualdad que estructura la actividad es:

$$\left(\begin{array}{c}\textit{Costo}\\ \textit{de la}\\ \textit{bolsita}\end{array}\right) = 3 \times \left(\begin{array}{c}\textit{Cantidad}\\ \textit{de}\\ \textit{caramelos}\end{array}\right) + 5$$

El trabajo con esta actividad permite poner a discusión los casos en que es posible utilizar los procedimientos anteriores, lo que podría implicar analizar diferencias entre esta actividad y las anteriores.

Para terminar

Al comenzar el artículo decíamos que la regla de tres es ejecutada de forma mecánica por muchos alumnos escolares y, en la mayoría de los casos, con escasa comprensión de su funcionamiento.

> *«Con relación a la conocida "regla de tres", Panizza, M. y Sadovsky, P. (1991) plantean que "el status con que se presenta el método ubica al alumno en la situación de estar aprendiendo un concepto nuevo (el de proporcionalidad), cuando en realidad está aprendiendo un método (que es válido cuando hay proporcionalidad). Todo eso crea una confusión entre el concepto y el método, y tiene como una de sus consecuencias el aprendizaje de un mecanismo ciego, independiente de los problemas que permite resolver".»* (Crippa, Grimaldi y Machiunas, 2005:14)

No caer en la enseñanza de la regla de tres como mecanismo ciego implica el conocimiento de sus fundamentos por parte de los maestros; y entre los alumnos, la oportunidad de explorar, probar diferentes formas de resolver y discutir las razones por las que funciona. El programa escolar vigente plantea: *«trabajar con operaciones habilitará a considerar los resultados obtenidos y argumentar su validez a través de relaciones numéricas y propiedades de las operaciones»* (ANEP. CEP, 2009:62).

Área del Conocimiento MATEMÁTICO

Referencias bibliográficas

ANEP. CEIP. República Oriental del Uruguay (2016): *Documento Base de Análisis Curricular*. Tercera Edición. En línea: http://www.ceip.edu.uy/documentos/normativa/programaescolar/DocumentoFinalAnalisisCurricular_diciembre2016.pdf

ANEP. CEP. República Oriental del Uruguay (2009): *Programa de Educación Inicial y Primaria. Año 2008*. En línea (Tercera edición, año 2013): http://www.ceip.edu.uy/documentos/normativa/programaescolar/ProgramaEscolar_14-6.pdf

BALDOR, Aurelio (1985): *Aritmética. Teórico Práctica*. Madrid: Compañía Cultural Editora y Distribuidora de Textos Americanos, Ediciones y Distribuciones Códice.

BROITMAN, Claudia; ITZCOVICH, Horacio; PARRA, Cecilia; SADOVSKY, Patricia (1997): *Matemática. Documento de trabajo Nº 4*. E. G. B. Actualización curricular. Buenos Aires: Secretaría de Educación. En línea: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matemat/doc4.pdf

CRIPPA, Ana Lía (coord. autoral); GRIMALDI, Verónica; MACHIUNAS, María Valeria (2005): "La Proporcionalidad". Proyecto Fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en EPB. La Plata: Dirección de Educación Primaria Básica. En línea: http://servicios2.abc.gov.ar/recursoseducativos/editorial/catalogodepublicaciones/descargas/docapoyo/proporcionalidad.pdf

PANIZZA, Mabel; SADOVSKY, Patricia (1991): *El papel del problema en la construcción de conceptos matemáticos* (Fragmentos). FLACSO/Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. En línea: http://www.ccgsm.gob.ar/areas/educacion/cepa/proporcionalidad_panizza_sadovsky.pdf

VÁZQUEZ DE TAPIA, Nelly; TAPIA DE BIBILONI, Alicia; TAPIA, Carlos Alberto (1985): *Matemática 2*. Buenos Aires: Ed. Estrada.