# Las propiedades de las operaciones

## En búsqueda de relaciones

**María del Carmen Curti** | Maestra. Formadora de maestros en Enseñanza de la Matemática.
**Carla Damisa** | Profesora de Matemática. Formadora de maestros en Enseñanza de la Matemática.

Las propiedades de las operaciones son un contenido del programa escolar que todos los docentes atienden y del que nadie discute la necesidad de su enseñanza.

Es interesante preguntarse si tal como se trabajan habitualmente tienen una verdadera relevancia, aportan a una concepción de enseñanza que promueva "hacer matemáticas" o simplemente forman parte del listado de contenidos que la tradición escolar indica que no deben faltar.

La presentación de las propiedades en casos puntuales, con ejemplos específicos que las ponen evidencia, no las convierten en herramientas para resolver cálculos ni se comprenden como soporte y fundamento de los algoritmos convencionales.

La escasa incidencia aún, del cálculo mental en el trabajo de aula, oportunidad inmejorable para el uso implícito de las propiedades, restringe su potencialidad para la comprensión de los diferentes cálculos.

Atendiendo a estas observaciones pensamos que el tratamiento de las propiedades de las operaciones puede y debe insertarse en la exploración de distintos tipos de cálculos.

Compartimos con varios autores la distinción entre *calculo mental*, diferenciándolo del tradicional cálculo oral; *cálculo escrito*, en el cual se incluyen los algoritmos artesanales y los convencionales; y *cálculo con calculadora*.

La potencialidad y las limitaciones de cada tipo de cálculo, así como las características propias de cada uno, han sido profusamente analizadas por varios autores, por tanto no se explicitarán en este trabajo.

Nos parece relevante explorar el uso de las propiedades de las operaciones en los diferentes tipos de cálculo, analizar su función en cada caso, explicitar su uso y fundamentar su validez para elaborar o trasparentar las reglas que las distinguen.

Con tal fin hemos pensado proponer la realización de los siguientes cálculos en forma simultánea usando la calculadora y el cálculo mental.

### Problema[1]

Trabajando en duplas, un integrante hace el cálculo mentalmente y registra cómo lo hizo; el otro lo hace con calculadora y registra sus acciones al pulsar las teclas y además lo que aparece en el visor.

[1] Este problema fue tomado y adaptado de las Jornadas de Formación en Servicio para Formadores de Educación Común de ANEP-CEIP.

| | Mental | Calculadora |
|---|---|---|
| 25 x 18 x 4 | | |
| 147 x 39 x 0 x 21 | | |
| 720 : 40 | | |
| 325 + 78 + 7 | | |

## 1er cálculo

**25 x 18 x 4**

Es sabido que el repertorio de cálculos es absolutamente personal y que depende de las experiencias de cada uno, así como de las herramientas matemáticas de que se disponga.

### Usando cálculo mental

Analizaremos algunas de las opciones de cálculo mental.

Para resolver 25 x 18 x 4 mentalmente es posible pensar, por ejemplo:

25 x 10 = 250

Apelando a la facilidad de la multiplicación por 10 y luego, observando que 5 es la mitad de 10 deducir que:

25 x 5 = 125

Completando con 25 x 3 = 75 que deberá sumarse a los otros productos para obtener 450.

Hasta acá, ¿qué propiedades se pusieron en juego?, lo que prima son los repertorios de cálculo; sin embargo previamente hubo que pensar en el 18 expresado como 10 + 5 + 3.

Al igual que la multiplicación que se define para dos factores, esta suma en que se descompuso el 18, debe ser resuelta de a dos sumandos elegidos en forma conveniente.

Estamos frente a la Propiedad Asociativa respecto a la Adición, que nos habilita a convertir un cálculo difícil como 25 x 18 en otros más sencillos.

Se usó la misma propiedad para pensar en el 10 como 5 x 2 y así saber sin hacer ningún otro cálculo, que 25 por 5 debe ser la mitad de 250.

Además de la Propiedad Asociativa, en el procedimiento anterior, está presente la Propiedad Distributiva de la Multiplicación respecto a la Adición. Analicemos cómo se "pensó esa cuenta":

25 x 18 = 25 x (10 + 5 + 3) = 25 x 10 + 25 x 5 + 25 x 3

El 25 está multiplicando al 18, que ahora se está considerando como la suma de 10, 5 y 3, por lo tanto el 25 está multiplicando a 10, a 5 y a 3.

Es posible, también, que algunos alumnos perciban este problema como:

25 x 10 + 25 x 10 - 25 x 2

Las propiedades en juego son las mismas, solo que en este caso se está utilizando un producto mayor para calcular uno menor, lo que obliga a restar "lo que sobra" que, en este caso, es 25 x 2.

En lugar de representarse el 18 como (10 + 5 + 3), se lo representa como (10 + 10 - 2).

Hemos visto distintas formas de pensar el 25 x 18, pero todavía hay que resolver ese producto por 4.

450 x 4

Este producto puede pensarse de diversas formas:

(400 + 50) x 4 = 400 x 4 + 50 x 4 (*)

450 x 2 x 2

Nuevamente la Propiedad Asociativa respalda las descomposiciones, para finalmente completar el cálculo 25 x 18 x 4 = 1800.

Asimismo, en esta producción (*) se usa la Propiedad Distributiva de la Multiplicación respecto a la Adición.

Otras veces y siempre de acuerdo con el tipo de números, será conveniente observar toda la situación planteada para buscar asociaciones ventajosas.

25 x 4 x 18 en lugar de 25 x 18 x 4 puede facilitar el uso de cálculos fáciles, que son generalmente los que nos conducen a números redondos o a las potencias de la base del Sistema de Numeración Decimal.

La Propiedad Conmutativa de la Multiplicación nos permite obtener 100 en el primer cálculo, modificando la ubicación del factor 4 y asociándolo con 25 usando el repertorio 25 x 4 = 100

Una variación de este cálculo puede ser a partir de conmutar, usar el repertorio "x 2" en forma sucesiva para llegar al 100; 25 x 2 x 2 x 18.

En este caso se están usando las Propiedades Conmutativa y Asociativa de la Multiplicación y la descomposición del 4 en factores y repertorio de cálculo x 2.

### Usando la calculadora

Veamos qué sucede cuando se usa la calculadora para realizar el mismo cálculo.

Al introducir los números en la calculadora como están presentados sin analizar, irán apareciendo en el visor:

Primero, el número 425 como resultado del producto de 25 x 18.

Luego, al introducir x 4, aparecerá el número 1800 como resultado del producto de 425 x 18. Este es el resultado de la multiplicación 25 x 18 x 4.

Queda en evidencia que la Propiedad Asociativa SIEMPRE está involucrada, no importa cuál sea el tipo de cálculo.

Esto se debe a que la multiplicación al igual que la suma, como ya dijimos, está definida para dos factores; por lo tanto, para multiplicar tres factores hay que reducirla primero a dos y luego este producto parcial multiplicarlo por el tercer factor.

Al usar la calculadora como instrumento, no es necesario conmutar para facilitar el cálculo.

Foto: Concurso Fotográfico QE / María Patricia Martínez

## 2º cálculo

**147 x 39 x 0 x 21**

### Usando cálculo mental

Si se realiza cálculo mental para resolver esta situación, es necesario establecer, igual que en el caso anterior, relaciones entre los números en juego e identificar que uno de los factores es 0.

Es posible que en una primera instancia, la presencia del 0 y sus consecuencias no sean advertidas y se comience a pensar en adecuaciones para facilitar el producto de 147 x 39.

Al encontrar ese producto y proceder a multiplicarlo por 0, si no se tiene totalmente claro cómo funciona la Propiedad de Absorción de la Multiplicación (cero como elemento absorbente), aunque se sepa que esta multiplicación da 0, quizás para algunos alumnos el resultado será 21, ya que este factor no está "afectado" por el 0.

La ubicación del 0 como factor en estas multiplicaciones, puede desencadenar diferentes interpretaciones que, en definitiva, demuestran las dudas en torno a la Propiedad de Absorción.

Si el 0 está ubicado al final, probablemente se realicen todas las multiplicaciones y solo al final se obtenga el resultado 0 y, por tanto, se concluya que esta debe ser su ubicación para "absorber" a todos los productos.

¿Cuáles serán las implicancias de iniciar una serie de multiplicaciones con 0?

La Propiedad de Absorción habilita a determinar el resultado de la operación y podemos establecer a partir de ella que *"si en un producto uno de los factores es 0, el resultado será siempre 0"*.

¿Será equivalente para los niños decir que *"multiplicar cualquier número por 0 da 0"* y que *"0 multiplicado por cualquier número da 0"*?

¿Conocer estos enunciados garantiza que no haya dudas en problemas como el que presentamos?

Creemos que, por el contrario, cálculos como estos deben ser propuestos a los niños, presentar diversos problemas con todas las variaciones posibles. Hacer aparecer todas las dudas, discutirlas y analizarlas posibilitará que reconozcan que es la Propiedad Conmutativa la que garantiza el funcionamiento de la Propiedad de Absorción cualquiera sea la ubicación del 0.

### Usando la calculadora

Igual que en el caso anterior, al introducir los números en el visor se obtienen los resultados parciales cada dos factores usando la Propiedad Asociativa, y en el visor aparecerán sucesivamente:

147
39
5733
0
0
21
0

Tener presente la Propiedad de Absorción tendría como consecuencia que en ninguno de los dos procedimientos (mental o calculadora) se efectuara cálculo alguno, ya que la presencia de un factor 0 debería permitir la anticipación del resultado 0.

## 3er cálculo

**720 : 40**

### Usando cálculo mental

720 : 40 = 72 : 4

Seguramente una opción muy adecuada es usar la Propiedad de Invarianza: *"al multiplicar el dividendo y el divisor por un mismo número, distinto de 0, se mantiene el cociente"*.

Se observará que no estamos multiplicando, sino dividiendo en virtud de la propiedad del inverso. Cuando dividimos entre 10 estamos multiplicando por 1/10 y, por lo tanto,

720 : 10 = 720 x 1/10 = 72

A partir de este primer paso que consideramos básico, los caminos a seguir pueden ser diferentes.

a) 72 : 4 = (60 + 12) : 4 = 60 : 4 + 12 : 4 = 15 + 3 = 18

En la expresión anterior se está utilizando la descomposición aditiva del 72 en 60 + 12 utilizando el carácter distributivo[2] de la división, en este caso se descompone el dividendo respecto a la adición.

También está en juego el uso de repertorio de cálculo: sabemos que 60 : 4 = 15 y que 12 : 4 = 3.

Si no se posee el repertorio 60 : 4 se puede recurrir a (60 : 2) : 2. Este último procedimiento lo analizaremos a continuación.

b) 72 : 4 = (72 : 2) : 2 = 36 : 2 = 18

En esta producción se está usando la descomposición en factores del divisor (descomposición factorial), 4 = 2 x 2.

Además se usa cierto repertorio de cálculo: "mitades de números pares".

### Usando la calculadora

Al igual que en los casos anteriores, aparecerán en el visor de la calculadora:

720
40
18

[2] Cuando decimos el carácter distributivo de la división nos estamos refiriendo a que la propiedad distributiva en la división no se cumple en general. Es válida cuando lo que descomponemos aditivamente es el dividendo. No se verifica la propiedad distributiva en la división con respecto al divisor, por eso decimos que no es una propiedad de la división.

Foto: Concurso Fotográfico QE / Edilia Maya



Nuevamente está presente la Propiedad Asociativa de la Multiplicación, considerando

$$720 : 40 = 720 \times \frac{1}{40}$$

y que dividir es lo mismo que multiplicar el dividendo por el inverso del divisor. La calculadora, en su programa, "sabe eso".

Aunque no trabajemos en el conjunto de los racionales (Q), la calculadora asume que sí, ya que en este conjunto numérico la división siempre es posible (sabiendo que el divisor es distinto de cero).

Observar que, al igual que en el resto de los casos, cuando usamos la calculadora, en el visor no se ven los signos que introducimos. Esto implica tener control sobre ellos y noción de la magnitud del resultado a determinar.

Actualmente, en las aulas conviven diferentes tipos de calculadoras; es conveniente analizarlas para constatar en ellas qué queda registrado en los visores cuando realizamos los cálculos y qué no.

En la calculadora de la XO se observa que al ir ingresando las órdenes que le damos, estas quedan registradas en el visor, lo que permite mayor control para revisar lo que ya hemos introducido. En cambio, en las calculadoras clásicas comunes, no científicas, en general este registro no se observa en el visor; esto implica que el alumno debe apoyarse en otro tipo de registro escrito para no perder el control de lo que ya le ordenó a la calculadora.

## 4º cálculo

**325 + 78 + 7**

### Usando cálculo mental

Un posible procedimiento podría ser descomponer 78 en 75 + 3 y conociendo el repertorio de 25 + 75 = 100, entonces esta suma se transforma en:

300 + 100 + 3 + 7 = 410

El 100 resulta de la suma del 25 del 325, con el 75 que se obtuvo por descomposición del 78 como 75 + 3.

El 3 con el 7 restante se vuelven a asociar, lo que da 10, por lo tanto ese cálculo de 325 + 78 + 7 se transformó en 300 + 100 + 10.

Estamos usando propiedades del sistema de numeración decimal en relación a las descomposiciones que podemos hacer.

En general, llevar algunos números a los "nudos" es conveniente porque los tenemos como repertorio de cálculos.

Las transformaciones que hicimos están relacionadas con las propiedades de la suma y con las del sistema de numeración decimal ligadas a la descomposición y los repertorios que sepamos.

Otro procedimiento posible sería sumar 78 + 7 = 85 para luego agregar esta suma a 325, recurriendo a 320 + 80 = 400; 5 + 5 = 10; total 410.

En definitiva se está poniendo en juego la composición y descomposición de manera conveniente, con el fin de usar repertorios de cálculos a 10, 100, etc.

Además están en juego las Propiedades Asociativa y Conmutativa de la Adición.

### Usando la calculadora

Van apareciendo en el visor:

325; luego 78 y 403; luego 7 y después aparece finalmente 410.

Nuevamente la Propiedad Asociativa es la que interviene.

## En síntesis

Pensamos que la reflexión y el análisis de los procedimientos de resolución de cálculos aportan a un conocimiento de las propiedades de las operaciones, que trasciende la memorización de su enunciado.

Es más, consideramos que el nombre de las mismas es una información de relativa importancia frente a la comprensión.

No se pretende cuestionar ni magnificar el ingreso de la calculadora en el aula, sino observar que los conocimientos que se ponen en juego dependen del instrumento que se use, en particular de qué propiedades usamos.

Otro elemento que nos interesa poner a discusión es desterrar la idea de que el cálculo mental NO ES EXACTO. Calcular "pensando" no significa obtener un resultado aproximado. Todos los cálculos que se han realizado son exactos; por ejemplo, 720 : 40 no es aproximadamente 18, es 18.

En la escuela es necesario trabajar los diferentes tipos de cálculo y habilitar a los alumnos, dependiendo de las situaciones, a elegir el mejor instrumento en cada caso o de acuerdo a la situación planteada.

El docente, mediante modificaciones adecuadas, promoverá el uso de alguno de ellos en detrimento de los otros, de acuerdo con sus objetivos de enseñanza.

Las propiedades involucradas en los dos tipos de cálculo en relación a las operaciones propuestas fueron:

- Propiedad Asociativa de la Multiplicación y de la Adición.
- Propiedad Conmutativa de la Multiplicación y de la Adición.
- Propiedad de elemento absorbente de la multiplicación.
- Propiedad Distributiva de la Multiplicación respecto a la Adición.
- Carácter distributivo[3] en la división respecto al divisor, recordar que solamente se descompone el dividendo.
- Propiedad de Invarianza de la División.

En relación al Sistema de Numeración Decimal, las propiedades que estuvieron en juego para los dos tipos de cálculo fueron:

- Composición y descomposición en relación a repertorios aditivos y multiplicativos.
- Repertorio de cálculos en función de la base del sistema: que sumen 10, 100, etc.
- Regularidades del sistema: si 3 + 1 = 4, entonces 300 + 100 = 400.

Esta reflexión pretende tender puentes entre el trabajo con las operaciones que hacemos comúnmente, sus propiedades y las propiedades del Sistema de Numeración Decimal. Establecer relaciones, tomar conciencia del uso implícito de las operaciones, no con el único fin de conocer sus nombres y memorizar un enunciado, será uno de los tantos desafíos de la enseñanza de las operaciones.

[3] Ya hemos realizado referencia a que la propiedad distributiva no se verifica en la división.

## Bibliografía consultada

BROITMAN, Claudia; ITZCOVICH, Horacio; PARRA, Cecilia; SADOVSKY, Patricia (1997): "Acerca de la enseñanza de las operaciones" (selección) en *Matemática. Documento de trabajo Nº 4*. E. G. B. Actualización curricular. Buenos Aires: Secretaría de Educación.

CHEMELLO, Graciela (1998): "El cálculo en la escuela: Las cuentas, ¿son un problema?" en Gustavo Iaies (comp.): *Los CBC y la enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires: AZ Editora.

COLERA, José; DE GUZMÁN, Miguel; BAS, Mª del Carmen (1994): "Bloque 1. Números" en M. de Guzmán; J. Colera: *Matemáticas. Bachillerato 1*. Madrid: Ed. Anaya.

CURTI, Mª del Carmen; DAMISA, Carla (2009): *Conceptos matemáticos: Número Natural*. Montevideo: Ed. Aula.

GIL, Omar (2003): "Números naturales, racionales y reales, y el sistema de numeración" en *Curso de Actualización en la Enseñanza de la Matemática para Inspectores de Educación Primaria*. Montevideo: PMEM - ANEP.

GIMÉNEZ, Joaquim y GIRONDO, Luisa (1993): *Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas*. Barcelona: Ed. Graó.

LERNER, Delia (2005): "¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración" en Mónica Alvarado; Bárbara M. Brizuela (comps.): *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la Psicología, la Didáctica y la Historia*. México: Ed. Paidós.

VÁZQUEZ DE TAPIA, Nelly; TAPIA DE BIBILONI, Alicia; TAPIA, Carlos Alberto (1985): *Matemática 1*. Buenos Aires: Ed. Estrada.