Un recorrido posible hacia el algoritmo de la división

Valentina Jung | Maestra. Integrante de Equipo y Formadora de Matemática del Componente Formación en Servicio en PAEPU.
Mercedes Laborde | Maestra. Máster en Educación. Integrante de Equipo y Formadora de Matemática del Componente Formación en Servicio en PAEPU.

¿A qué hacemos referencia cuando decimos aprender a dividir y a multiplicar con alumnos del siglo XXI?

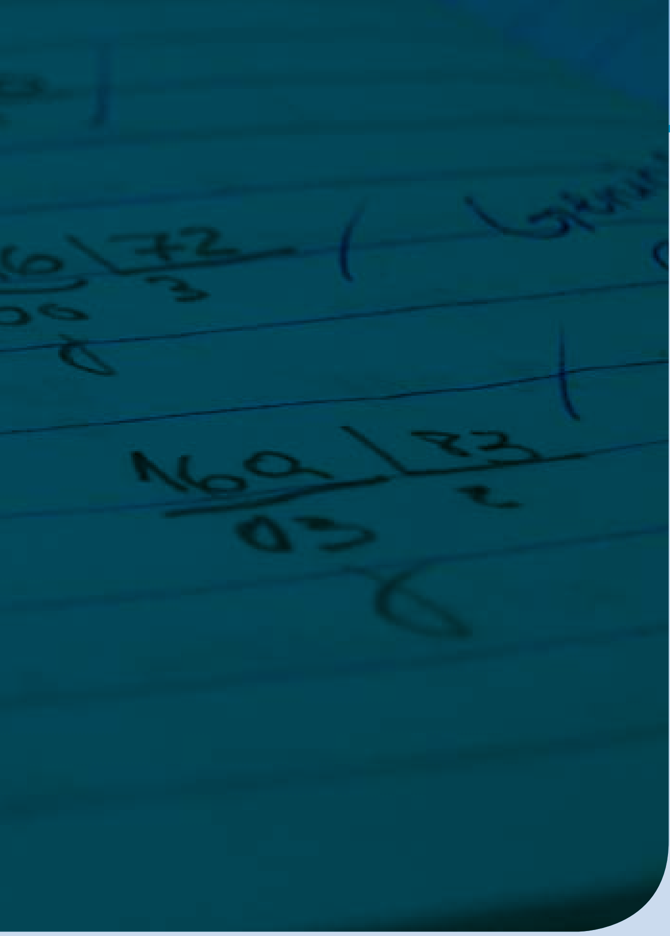
Aprender la multiplicación y la división implica ser capaz de utilizarlas en diferentes situaciones, relacionarlas, "poner en juego" algunas de sus propiedades, establecer vínculos con el sistema de numeración, tener a disposición un repertorio de cálculo amplio y resolver el algoritmo.

Su enseñanza encierra, entonces, una serie de aspectos todos importantes y necesarios, que requieren de la planificación de un recorrido didáctico pleno en desafíos que habilite, tal como lo plantea Kincheloe (2001) –adhiriéndose al pensamiento de Gregory Bateson– "la danza de las partes interconectadas".

Habitualmente se pensaba que la multiplicación y la división eran contenidos propios de segundo grado, y su enseñanza estaba centrada en los algoritmos y en las tablas. En otro momento, si bien se mantuvo el foco en la resolución de la "cuenta", a partir de distintas investigaciones se generalizó la idea de que era el niño quien debía desarrollar estrategias propias para resolver situaciones de multiplicación y de división, restándole importancia al algoritmo convencional. Lo importante era que pudiera dividir o multiplicar.

En este artículo nos proponemos centrar la mirada en las intervenciones que debe realizar el docente para hacer evolucionar esas estrategias primarias de resolución –muy ligadas a la situación que las origina– hacia otros procedimientos más generales, menos transparentes, a los que el alumno pueda recurrir cualquiera sea la situación planteada. Nos interesa potenciar la resolución de situaciones de división a través de procedimientos comprendidos por quienes los lleven a cabo, de manera que esas estrategias resulten verdaderas herramientas en las que se pone en juego el pensar numéricamente.

Según Kamii (1995), así como los algoritmos son el producto de la creatividad del hombre a lo largo de muchos años de construcción, el niño debe tener la oportunidad de "reinventar la Matemática" recreando algunos procedimientos de resolución que le permitan comprender por qué hace lo que hace. El enseñar el mecanismo algorítmico convencional impide que los niños desplieguen su propio pensamiento numérico, así como les dificulta comprender propiedades del Sistema de Numeración tales como el valor posicional. Esta enseñanza "prescripta" también crea dependencias con el cálculo de lápiz y papel, debilitando la incidencia del cálculo pensado.



«No se pretende que los alumnos reinventen lo que ya existe, o que lo reproduzcan mecánicamente, sino entusiasmarlos para que piensen matemáticamente. De este modo, la actividad que ellos desarrollan tendrá el mismo sentido que la de los matemáticos que elaboraron, por primera vez, los conceptos fundamentales de la disciplina.» (Comparatore y Kurzrok, 2011)

Nos preguntamos: **¿Cuál es el camino a recorrer? ¿Qué posición tomamos al respecto? ¿Cuáles son los argumentos que nos ayudan a resolver esta disyuntiva?**

El camino no es único, pero según nuestro parecer debe potenciar la puesta en escena de formas de pensar, discutir, relacionar, alejándonos de formas preestablecidas de transmisión, donde el conocimiento social prima por sobre el conocimiento matemático. En un primer momento – luego de presentada la situación que se resuelve con una división– se espera que los alumnos activen estrategias personales de resolución. En un segundo momento se propicia la confrontación de algunas de estas resoluciones, analizando los conocimientos matemáticos que los niños ponen en juego intuitivamente. En un tercer momento, luego de hacer explícito lo implícito, se pretende transitar hacia procedimientos más sintéticos, menos costosos en desarrollo, prácticos, pero ricos en comprensión y autonomía.

¿Cómo ejemplificar estas ideas que defendemos?

Hemos pensado algunas actividades que se interrelacionan y constituyen un campo de problemas, con las que es posible organizar una secuencia de enseñanza de la división. Partimos de un primer problema con el que intentamos conocer el estado de situación de los alumnos con relación a esta operación.

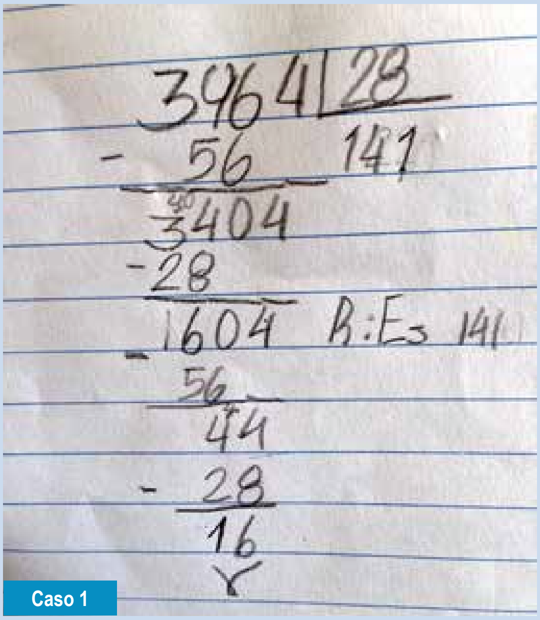
> Se reciben 3964 libros en cajas de 28 libros cada una. ¿Cuántas cajas hay?

Es un problema de agrupamiento en el que se trabaja con dos unidades de medida (libros y cajas con libros) e interesa conocer cuántas cajas se completan ubicando 28 libros en cada una de ellas hasta completar los 3964 libros de los que se dispone. Este problema (3964 libros entre 28 libros), a diferencia de los problemas de reparto, promueve de forma “visible” la necesidad de relacionar la multiplicación y la división, pues “obliga” a pensar en el 28 como un todo y relacionar esa “caja de 28” con la cantidad total de libros.

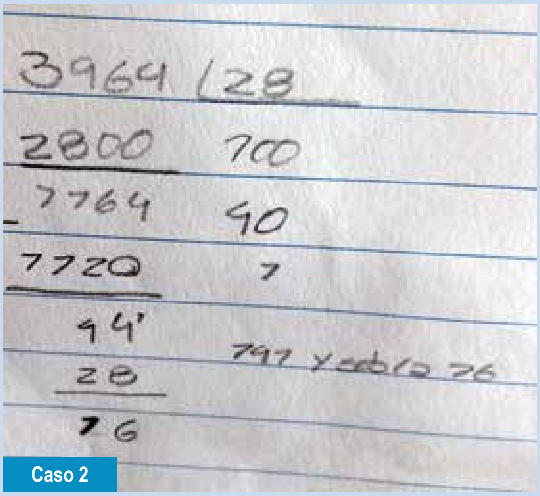
> Es posible pensar estimando un cociente:
> 28 x 10 (son 10 cajas con 280 libros)
> 28 x 100 (son 100 cajas con 2800 libros)
> 28 x 1000 (son 1000 cajas con 28000)

Por lo tanto se necesitarán más de 100 cajas y menos de 1000 para agrupar todos los libros que se poseen.

Estas relaciones multiplicativas, que surgen ante la necesidad de encontrar un número (cociente) que multiplicado por otro (divisor) se aproxime a otra cantidad numérica (dividendo), deben construirse a lo largo del ciclo para que se conviertan en herramienta cuando sea necesario encontrar estrategias para la resolución de la división. Analicemos los conocimientos que son posibles de identificar en los siguientes ejemplos.



Caso 1



Caso 2

Caso 1

El alumno recurre a un repertorio que maneja 28 x 20 = 560, dejando en evidencia la relación multiplicación-división pues busca múltiplos de 28 para aproximarse a 3964. Al restar utiliza conocimientos que tiene sobre el valor posicional al ubicar el producto como 56 dieces. No necesita escribir 560 ni 2800; entiende que el encolumnado de las cifras significativas en los órdenes correspondientes es suficiente. Es decir, sabe que el lugar donde ubique cada cifra determina su valor, sin necesidad de escribir todo el número –caso 3404 - 28 (2800)–.

El cociente lo "arma" sumando los factores por los cuales multiplicó el 28 –20 + 100 + 20 + 1–.

Caso 2

En este caso, a diferencia del anterior, deja explícita la desagregación del cociente que inicia por el factor mayor (100). Se apoya en las tablas "puse 1120 porque 4 x 28 es 112"; y a su vez maneja "en acto" la propiedad asociativa de la multiplicación: multiplicar por 40 es lo mismo que hacerlo por 4 y por 10 (40 = 4 x 10). Estos cálculos también dejan en evidencia ciertas relaciones entre los términos de la multiplicación, en las que si uno de los factores se multiplica o divide, el producto variará proporcionalmente. De esta manera, el alumno se apropiará de vínculos entre los términos, que facilitarán la estimación y la verificación de resultados.

Tal como observamos en los ejemplos citados anteriormente, los procedimientos personales "muestran" un estado de saber, nos informan sobre lo que los alumnos saben y han construido.

Y ahora... ¿qué hacer con estos procedimientos que surgen?

En cada nuevo problema se favorece el intercambio en la búsqueda de caminos menos "apegados" a cada situación que se plantea. Esto supone ir construyendo ciertas generalizaciones "algorítmicas", dejando atrás descomposiciones exhaustivas tanto del dividendo como del cociente.

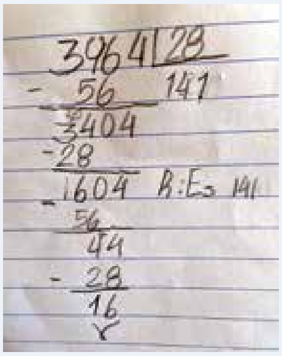
Los procedimientos pasan de ser inicialmente espontáneos a ser "construidos" en forma colectiva. Transitan de esta manera desde la heterogeneidad a una cierta homogeneidad en tanto que cada división que se ejecuta no tiene un desarrollo tan ligado a la situación que la origina, sino que posee aspectos comunes que permiten ser utilizados en otras instancias que así lo requieran.

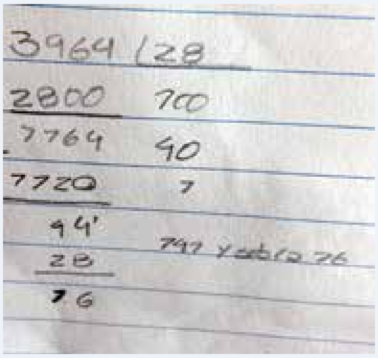
Transitamos de una resolución "localizada" a una resolución algorítmica general.

¿Cómo vinculamos los procedimientos de los alumnos con el algoritmo convencional? ¿Cuáles son los beneficios para el niño con relación al conocimiento del algoritmo convencional?

Un primer paso es realizar la comparación entre distintos procedimientos personales, que se han reconstruido colectivamente dentro del grupo y se han discutido, habilitando el establecimiento de relaciones multiplicativas.

¿Qué tienen de semejante estos dos desarrollos? ¿Dónde está el 100 de Marcos en la cuenta de Ignacio? ¿Y el 1120, que aparece en el desarrollo de Marcos, está en el de Ignacio? ¿Dónde? ¿Cómo es posible asegurarlo?





En otra instancia, el desafío consiste en plantear:

¿Cómo podemos hacer “menos cuentas” en el desarrollo de esta división?

8789	26
2600	100
6189	100
2600	100
3589	10
2600	10
989	10
260	2
729	2
260	2
469	2
260	338
209	
52	
157	
52	
105	
52	
53	
52	
01	

A partir de esta propuesta es esperable que los niños puedan pensar en 300 en lugar de 100 – 100 – 100, considerando que multiplicar por 300 implica multiplicar 26 x 3 x 100. Esta misma estrategia que supone “sintetizar desarrollos de cálculo” puede trasladarse a los dieces 26 x 3 x 10. En el caso de las unidades 2 – 2 – 2 – 2, podría pensar que 25 x 4 es cien, entonces 26 x 4 son 4 más. Se apoya en un repertorio conocido y relaciones entre los términos de la multiplicación. También podría pensar que si 10 x 26 es 260 puede pensar en un cociente cercano a 10. En este caso, el 8 lo podría formar restándole a 260 de a 26.

De esta manera, a través de distintas situaciones planteadas por el docente con este fin, es el alumno el que comienza a sintetizar el desarrollo del algoritmo. Esto surge, sobre todo, en aquellos casos en los que se opera con un dominio numérico alto. Se introducen “ciertos recortes” que implican síntesis parciales en la resolución, lo que beneficia directamente al alumno pues hace menos cuentas, simplificando esta herramienta que deberá volver a utilizar en la resolución de otras situaciones.

Acompañando el tipo de actividad anterior, se podría presentar este nuevo problema que pretende, a diferencia del anterior, que el alumno analice la pertinencia y la conveniencia del redondeo del divisor. Asimismo, debe reutilizar las estrategias de desarrollo algorítmico anteriores, readaptándolas con esta nueva propuesta que lo “obliga” a considerar las tablas como fuente de consulta y a pensar en agrupamientos mayores que redundarán en menor número de cocientes parciales.

Para hacer la división 2875 : 38, Lucas dice que se ayudó con estas multiplicaciones que sabe:
6 x 40 = 240
60 x 40 = 2400
¿Cómo lo pensó Lucas? Si es una división entre 38, ¿por qué le sirve el 40? Resuelve la cuenta siguiendo el procedimiento de Lucas.

¿Por dónde seguimos? O tal vez, ¿por dónde empezamos?

Como dijimos anteriormente, para que el niño pueda desarrollar estrategias de cálculo, generalizables a todas las situaciones, es necesario trabajar con aspectos ligados a relaciones entre los términos de la multiplicación que ayudan a encontrar el dividendo.

Sabiendo que 30 x 5 es 150, ¿cuánto es?
28 x 5
32 x 5
34 x 5
33 x 5
27 x 5

Con esta propuesta se pretende que los niños establezcan relaciones entre la disminución o el aumento aditivo de uno de los factores y el producto. Por ejemplo, para determinar el producto de 28 x 5 el alumno deberá identificar que la diferencia 2 corresponde a 2 x 5. Por lo tanto, el producto es 150 - 10. En el caso de 32 x 5, en lugar de restarle 10 debe sumarle.

Cabe aclarar que los números no son elegidos al azar. El factor 5 habilita recurrir a un repertorio apoyado en la tabla del 5 o en la suma de 5, siendo uno de los primeros en construir. Dado que el objetivo es identificar relaciones entre los términos, la dificultad no puede radicar en el cálculo propiamente dicho. La utilización de estos números "fáciles" habilita la entrada a este nuevo desafío: relacionar los "cambios de un factor y su producto".

¿Cómo se relaciona esto con la división?

Veamos si planteamos la propuesta anterior de esta forma:

Si sabemos que 150 : 5 = 30, ¿podemos saber, sin hacer cuentas, cuánto es?
140 : 5
135 : 5
165 : 5
138 : 5

Estos desafíos pueden presentarse constituyendo una nueva actividad o ser parte de la "problematización" en la puesta en común. Se pretende que el niño pueda estimar el cociente apelando a relaciones multiplicativas cuando resuelva la división.

¿Entre qué números ubicas al cociente? Explica cómo lo resolviste.

	Entre 9 y 10	Entre 8 y 7	Entre 7 y 6	Entre 4 y 3	Entre 6 y 5	Entre 5 y 4
367 : 38						
367 : 42						
367 : 43						
367 : 45						
367 : 46						
367 : 31						

En este otro ejemplo se espera que reinviertan lo trabajado y construyan un "pequeño nuevo avance", ya que se presentan divisiones enteras no exactas entre números de dos cifras. "Si por 10 es 380, por 9 es 38 menos". También entran en juego otras relaciones, pues se mantiene el mismo dividendo y se varía el divisor. Esto permite poner la mirada en la relación "cociente-divisor" –a mayor divisor menor cociente y viceversa–.

Además, se le solicita al alumno que "explique" su procedimiento "forzándolo" a explicitar qué conocimientos utilizó y las relaciones entre ellos. En la puesta en común será tarea del docente trabajar con las explicaciones –más allá de las respuestas– "revisitando" lo ya trabajado y construyendo, en colectivo, algunas "generalizaciones" que ayuden al alumno en este camino de la división. Esto que estuvimos trabajando: ¿nos sirve para hacer las divisiones? ¿Qué podemos dejar registrado para tenerlo en cuenta a la hora de dividir?

De esta manera, estos cierres parciales permiten acordar explícitamente las reglas construidas colectivamente y el compromiso de su "puesta en práctica" en próximos trabajos, dejando de lado estrategias que seguramente han "caducado".

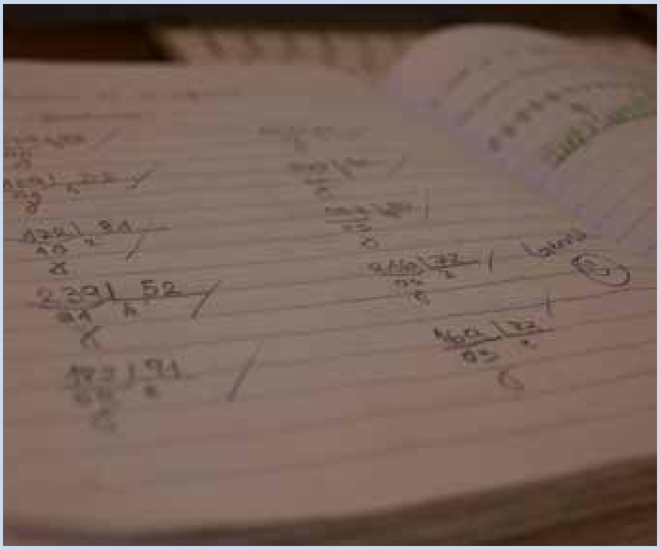
Completa la tabla teniendo en cuenta que 25 x 17 es igual a 425.

	Cociente	Resto
425 : 17		
435 : 17		
429 : 17		
445 : 17		
440 : 17		
441 : 17		
420 : 17		
415 : 17		
408 : 17		
442 : 17		

Para resolver esta situación es necesario comparar los dividendos presentados en la tabla (425, 435, 429, 445,... 442) con el producto de la multiplicación (25 x 17 = 425) que oficia como punto de partida. La primera división pone en juego la relación múltiplo-divisor siendo sencilla su resolución. En las posteriores es necesario realizar comparaciones entre los nuevos dividendos que se presentan y el producto original (425). Al hacerlo, se involucra la relación divisor-resto. Por ejemplo, en el 445 la diferencia con el dividendo de la consigna original (425) es 20, por lo tanto, se debe considerar que esa diferencia es mayor que el divisor, y por ello, varía el cociente en 1 y el resto será 3, ya que 20 - 17 = 3.

En los otros casos de las divisiones planteadas, puede ocurrir:

- Que se mantenga el mismo cociente y varía el resto.
- Que disminuya el cociente y varía el resto.
- Que la división tenga resto cero.



En este último caso –división con resto cero– es interesante focalizar la relación dividendo-divisor (dividendo múltiplo del divisor) y retomar las relaciones multiplicativas trabajadas.

Trabajar con la estimación del cociente contribuye a desarrollar estrategias de control con relación a la pertinencia del cociente. Por este motivo, pensamos en una nueva actividad que ayuda a cumplir este propósito.

Para cada una de las siguientes divisiones señala el cociente que te parezca más cercano.

936 : 35	50	10	100
6000 : 55	100	200	300
8932 : 105	8	80	800
817 : 21	4	400	40

Esta actividad pone el foco en "el redondeo" del cociente y su pertinencia que surge de la relación multiplicación-división apelando a repertorios de cálculo. Para determinar cuál es el cociente de 8932 : 105 es posible que el alumno redondee el divisor en 100 y piense "100 x 8 es 800 entonces no puede ser 8"; "100 x 80 es 8000" y lo elija como el más cercano descartando también a la última posibilidad que resta –800–.

En el caso de 6000 : 55, no necesita redondear el divisor porque los cocientes lo habilitan a operar con múltiplos de 100.

A modo de cierre

Hemos realizado un recorrido que es posible rearmar, integrando nuevas actividades y reubicando las dadas. Intentamos transparentar algunas relaciones que creemos son posibles de establecer entre las actividades presentadas. Cada una de ellas da la posibilidad de recuperar "saberes" acordados y construir otros de manera de "encadenar" las relaciones entre los conocimientos, fortaleciendo una trama de ideas con relación a la división.

Todo esto será la base para promover la resolución del algoritmo de la división "descortezándolo", y por lo tanto haciéndolo más comprensivo. Es mediante estas redes de propiedades y relaciones, que el alumno podrá acercarse con mayor seguridad a la división.

Coincidimos plenamente con Lerner (2005) cuando plantea: "¿Tener éxito o comprender?". Nos inclinamos por este último aunque sabemos que es un camino largo, de idas y vueltas, de incertidumbre; pero a la vez muy productivo y gratificante para el que aprende y para el que enseña.

Supone un hacer diferente en el que se habilita la exploración, la elaboración de conjeturas provisorias, la producción de explicaciones, la construcción de reglas. Una manera de "Hacer Matemática". Q

Referencias bibliográficas

ÁVILA, Alicia (1995): "Problemas fáciles, problemas difíciles" en D. Block Sevilla (coord.): *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Lecturas*. México: SEP/PRONAP.

BLOCK, David; DÁVILA, Martha (1995): "La matemática expulsada de la escuela" en D. Block Sevilla (coord.): *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Lecturas*. México: SEP/ PRONAP.

BROITMAN, Claudia (1999): "La enseñanza de la división en los primeros años" (Cap. 5) en *Las operaciones en el primer ciclo. Aportes para el trabajo en el aula*, pp. 73-95. Buenos Aires: Ed. Novedades Educativas.

COMPARATORE, Claudia; KURZROK, Liliana (2011): *Cómo enseñar a dividir en la escuela primaria*. Buenos Aires: Tinta fresca.

JUNG, Valentina; LABORDE, Mercedes; LUJAMBIO, Ana Laura (2011): "Operaciones con 'significado'". Montevideo: PAEPU. Curso de Apoyo a la Enseñanza de la Matemática para Maestros de Escuelas Comunes. En línea: http://www.mecaep.edu.uy/pdf/matematicas/2013/Jornada2/JungV_Laborde_MLujambio_A.(2011).%20PAEPU.OperacionesConSignificado.pdf

KAMII, Constance (1995): "Los efectos perjudiciales de los algoritmos" (Cap. 3) en *Reinventando la aritmética III*. Madrid: Ed. Aprendizaje Visor.

KINCHELOE, Joe L. (2001): *Hacia una revisión crítica del pensamiento docente*. Barcelona: Octaedro.

LERNER, Delia (2005): "¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración" en M. Alvarado; B. M. Brizuela (comps.): *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la Psicología, la Didáctica y la Historia*, pp. 147-197. México: Ed. Paidós.

MARTÍNEZ, Patricia; MORENO, Eva (1996): "Aprendiendo a dividir" en *Básica. Revista de la escuela y del maestro*, Nº 11 (mayo-junio), pp. 34-44. México: Fundación SNTE para la Cultura del Maestro Mexicano.

QUARANTA, María Emilia; WOLMAN, Susana (2003): "Discusiones en las clases de matemática. Qué, para qué y cómo se discute" en M. Panizza (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*. Buenos Aires: Ed. Paidós.

SADOVSKY, Patricia; TARASOW, Paola (2013): "Transformar ideas con ideas. El espacio de discusión en la clase de matemática" (Cap. 7) en C. Broitman (comp.): *Matemáticas en la escuela primaria [II]. Saberes y conocimientos de niños y docentes*. Buenos Aires: Ed. Paidós. Colección Cuestiones de Educación.