El Álgebra en el nuevo escenario programático

Certezas e incertidumbres en torno a su enseñanza

Ariel Fripp | Profesor de Matemática (IPA). Diploma en Educación (Universidad ORT - Uruguay).
Beatriz Rodríguez Rava | Maestra. Licenciada en Ciencias de la Educación. Formadora en Didáctica de la Matemática.

En este espacio nos proponemos continuar aportando elementos para la lectura del *Programa de Educación Inicial y Primaria. Año 2008.*

En esta instancia nos centraremos en una de las incorporaciones de ese texto programático: Álgebra[1].

A lo largo del artículo intentaremos realizar aportes que permitan responder algunas de las preguntas que nos formulamos, al igual que lo hacen otros colectivos docentes.

- ¿Desde qué postura se incluye el Álgebra en el nuevo programa escolar?
- ¿Qué argumentos se manejan que justifiquen la inclusión del Álgebra en la escuela primaria?
- ¿Cómo se vincula la red conceptual con los contenidos que presenta el programa escolar?
- ¿Qué relaciones se establecen entre los diferentes saberes de la red conceptual?

Intentar dar respuesta a estas interrogantes nos exige la identificación de marcas y el análisis de las mismas a lo largo de los distintos componentes[2] que organizan el programa escolar:

- Introducción.
- Fundamentación General y Fines.
- Fundamentaciones por Áreas y Disciplinas.
- Redes Conceptuales por Áreas y Disciplinas.
- Contenidos por Áreas de Conocimiento.
- Ejemplificaciones.

Nos parece necesario precisar primeramente qué establece el programa escolar con respecto a Áreas de Conocimiento, Redes Conceptuales y Contenidos, y cuáles son las vinculaciones entre ellos.

«Las Áreas de Conocimiento conforman la estructura general que organiza el conocimiento a enseñar desde su epistemología. […]

Están constituidas por campos o disciplinas, los cuales presentan una selección de saberes organizados a partir de redes conceptuales.» (p. 10)

Las redes conceptuales, como organizadoras de saberes, tienen según el propio programa *«el propósito de:*

- *Determinar los saberes necesarios a construir por el alumno a lo largo del ciclo escolar.*
- *Mostrar las relaciones teóricas que explicitan las implicancias epistemológicas del conocimiento que facilitan la construcción de significados.*
- *Constituirse en herramienta intelectual para el trabajo institucional de los colectivos docentes, al pensar y definir las prácticas de enseñanza desde su autonomía profesional.»* (p. 11)

El texto también plantea que: *«Los contenidos de enseñanza están formulados a partir de las redes conceptuales generales. La secuenciación por grado y por área da cuenta de la profundización y ampliación del conocimiento a enseñar desde los tres años hasta sexto grado escolar.»* (p. 10)

[1] El programa escolar establece en su introducción: *«En el Área del Conocimiento Matemático se incorporan las disciplinas Álgebra, Estadística y Probabilidad»* (p.12).
[2] Nominación que aparece en la p. 10 de la propuesta programática.

Según lo establecido por el programa escolar, las redes organizan el conocimiento designado para ser enseñado, pero además son las que determinan *«los saberes necesarios a construir por el alumno a lo largo del ciclo escolar»* (p. 11). Esto nos lleva a pensar que la inclusión de los distintos saberes estaría pautando no solo lo que el maestro debería enseñar, sino también el derecho del alumno a apropiarse de dichos saberes a lo largo del ciclo escolar.

Con respecto a la red conceptual

Las redes representan un conjunto de conceptos organizados en una estructura, no jerárquica, ligados por relaciones directas o indirectas. Son recursos esquemáticos que permiten representar gráficamente los contenidos y sus relaciones.

En ese sentido, toda red conceptual está integrada por nodos ligados por flechas que dan cuenta del sentido de las relaciones. Otra característica de este tipo de redes es la no repetición de los nodos.

La red conceptual (Fig. 1) correspondiente a Álgebra (p. 118) presenta una selección de saberes que se estructuran a través de los distintos nodos.

En ella se destacan con letra mayúscula cuatro nodos: EXPRESIONES ALGEBRAICAS, PROPORCIONALIDAD, GENERALIZACIÓN y PATRÓN. Esto lleva a pensar que son los conceptos más importantes.

A su vez, el recuadro destacado de EXPRESIONES ALGEBRAICAS y su ubicación estarían indicando una mayor relevancia de este nodo.

Todo esto nos hace pensar en una organización jerárquica. Si es así, ¿estamos frente a una red conceptual?, ¿a un mapa semántico?, ¿o a otro tipo de organizador de saberes?

Nos preguntamos: ¿por qué en el texto programático se destaca EXPRESIONES ALGEBRAICAS? ¿Se está priorizando esto como cuestión valiosa? Si bien consideramos que el lenguaje algebraico tiene su importancia, no creemos que sea ni una vía de entrada ni un objetivo a conquistar a nivel de la escuela primaria.

El lenguaje algebraico se caracteriza por un alto nivel de abstracción, lo cual es causa de numerosas dificultades al momento de su abordaje, aun en la enseñanza secundaria.

«El uso de la notación formal puede conducirnos a reglas irracionales, a manipulaciones sin sentido y, no obstante, tal manipulación formal es un rasgo esencial de las matemáticas». (Socas Robayna y otros, 1989).

¿Qué relaciones ligan las expresiones algebraicas con la variación lineal, las variables y el valor numérico?

Al diagramar una red conceptual que plantea un vínculo entre las expresiones algebraicas y las variaciones lineales se habilita a pensar que las expresiones algebraicas se constituirían como forma primordial de representar dichas variaciones.

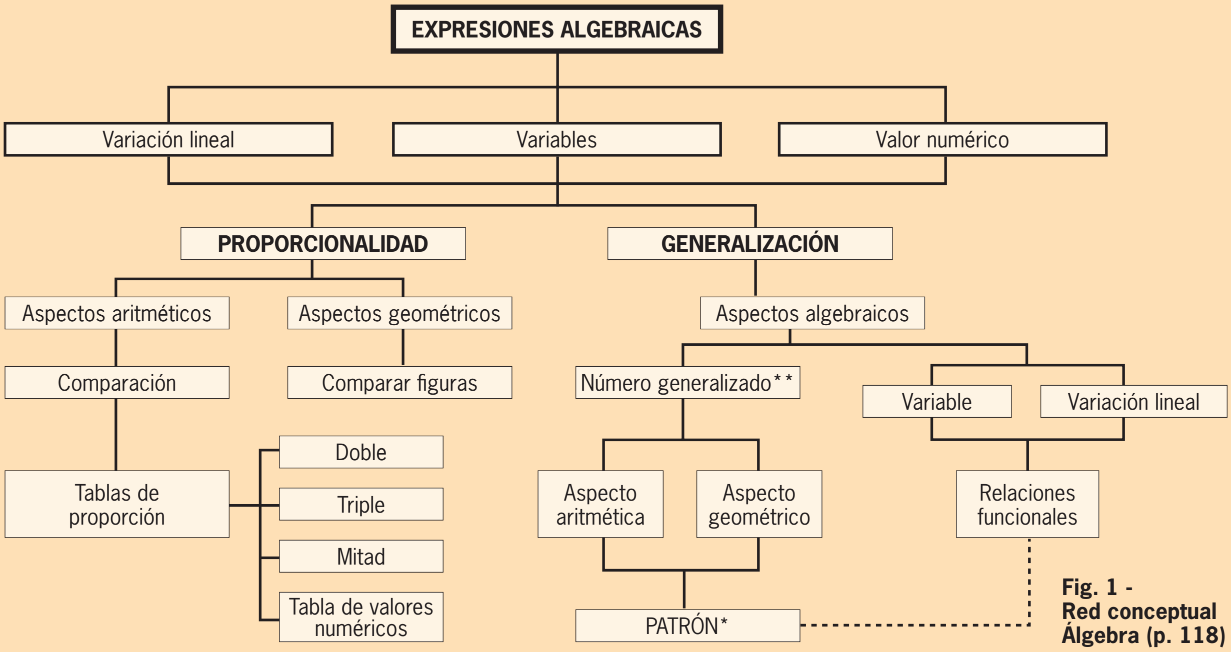

Fig. 1 - Red conceptual Álgebra (p. 118)

Volvemos a preguntarnos, ¿el foco de atención estaría entonces en la sintaxis del lenguaje algebraico?

Al considerar el propósito de la red conceptual: *«determinar los saberes necesarios a construir por el alumno a lo largo del ciclo escolar»* (p. 11), nos surge otra interrogante. ¿La variación lineal es un saber necesario para que construya un alumno en edad escolar?

Consideramos que ciertas variaciones, como pueden ser las variaciones proporcionales, se constituyen en escenarios muy ricos en los cuales el maestro podría gestionar actividades que contribuyan a desarrollar algunas ideas algebraicas.

Por otra parte, si estamos ante una red conceptual es ineludible preguntarse si *"aspectos algebraicos"*, *"aspectos geométricos"*, *"aspectos aritméticos"*, *"comparar figuras"* son considerados conceptos.

Otro de los nodos destacados en esta red es GENERALIZACIÓN.

En la Fundamentación por Áreas y Disciplinas se plantea: *«El Álgebra permite generalizar propiedades y relaciones valiéndose de números, letras y símbolos. Describe conexiones entre variables y posibilita la construcción de modelos aplicables a fenómenos de distinta naturaleza»* (p. 63).

De este planteo rescatamos la importancia de los procesos de generalización en la escuela primaria. Sostenemos que desde los primeros grados escolares es posible iniciar el desarrollo de estos procesos. Los alumnos encuentran regularidades y son capaces de explicitarlas: "si sumas 2 números no importa cuál pones primero, da lo mismo", "si sumas dos más cinco, te da siete… entonces veinte más cincuenta te da setenta, porque ahora trabajas con dieces" "si a los números que terminan en nueve le sumas uno el número va a terminar en cero". En estas expresiones se evidencian generalizaciones de alumnos de primer año escolar.

Estas generalizaciones podrán complejizarse y ampliarse a lo largo del ciclo escolar a partir de un trabajo sostenido con actividades que no nos atrevemos a nominar bajo el título de Álgebra. Tal vez podemos afirmar que son actividades de corte algebraico.

Pensamos que los procesos de generalización no deben ir "atados" a la sustitución de números por letras; de hacerlo se podría estar jerarquizando el aspecto sintáctico de expresiones algebraicas carentes de significado.

Nuestra postura nos hace discrepar con la afirmación: *«La enseñanza de los números y de las operaciones a lo largo de la escolaridad le da continuidad al mundo de los números concretos en aritmética y en cuarto grado se inicia un proceso de sustitución de esos números concretos por letras»* (p. 67).

Consideramos importante la integración de actividades de corte algebraico, buscando un anclaje desde los primeros grados escolares en las regularidades y en los procesos de generalización, cuestiones estas que nos permitirían justificar la inclusión de algunas ideas algebraicas en la escuela primaria.

Con respecto a los Contenidos que propone el Programa de Educación Inicial y Primaria

Al analizar la tabla de la Fig. 2 (p. 178) encontramos, por ejemplo, la relación entre número de caras y polígonos de la base en prismas y pirámides, las relaciones de doble, triple, mitad, etc. Consideramos que proporcionan buenos escenarios para trabajar el patrón, el número generalizado, la variable como expresión del número generalizado. Coincidimos con lo planteado en la p. 67 del texto programático: *«El trabajo en la escuela con el Álgebra se tomará a través de dos contextos: el contexto geométrico y el contexto aritmético»*.

Sin embargo, al relacionar esto con la tabla de la Fig. 2, señalamos cierta contradicción: en esta ya no figuran los contextos, sino que se habla de aspectos, ¿aspectos de un contenido?

Sostenemos que lo que se presenta bajo el título de aspecto geométrico y aspecto numérico podría ser considerado como contenido en otros niveles del sistema educativo.

En Primaria sería posible considerar algunos de ellos como escenarios o contextos de trabajo para el desarrollo de procesos de generalización.

El programa incluye como aporte al maestro, algunas ejemplificaciones *«para pensar y crear su propia propuesta de enseñanza»* (p. 11).

Cuarto grado	Quinto grado	Sexto grado
El patrón. El número generalizado.	**La variable como expresión del número generalizado.**	**La variable como expresión del número desconocido.**
	ASPECTO GEOMÉTRICO	
El número de diagonales de un polígono convexo desde un vértice. **La triangulación: el número de triángulos interiores a un polígono convexo utilizando las diagonales.**	**Las relaciones entre número de caras y polígonos de la base en prismas y pirámides.** **El número de diagonales de un polígono convexo.** **La suma de ángulos interiores de los polígonos.**	**Las relaciones entre número de aristas y número de vértices en relación con el polígono de la base en prismas y pirámides.** **La expresión de la relación.** **El valor numérico.** **El número de rectas que se forman a partir del número de puntos no alineados tres a tres.**
	ASPECTO NUMÉRICO	
Las expresiones de relación de doble, triple y cuádruplo (tablas de multiplicar).	**Las expresiones de relación en el número par e impar.** **La multiplicación de:** - nº par por nº par - nº impar por nº impar - nº impar por nº par	**Las expresiones generalizadas de múltiplos de 2, 3 y 4.** **La suma de números impares como cuadrado perfecto.** **Las relaciones entre múltiplos.** **Las relaciones que involucran fórmulas de cálculo de perímetro, área y volumen como expresiones algebraicas.** **El valor numérico.**

Fig. 2 - Contenidos de Álgebra (p. 178)

Con respecto a las Ejemplificaciones

Consideraremos tres de las ejemplificaciones para analizar en qué medida ellas aportan a la organización que efectúa el maestro del contenido a enseñar.

En la p. 386 del texto programático encontramos el título *«Álgebra. Contexto geométrico»* y una actividad pensada para Cuarto grado.

En el recuadro correspondiente a esta actividad aparece: *«Contenido: El patrón. El número generalizado. El número de diagonales de un polígono convexo desde un vértice».*

Es valioso poder identificar, en este caso, cuál es el contenido objeto de enseñanza, ¿es el patrón?, ¿es el número generalizado?, ¿es el número de diagonales de un polígono convexo?

Se torna necesario diferenciar una actividad del objetivo matemático que se persigue con la misma. La actividad no es el objetivo de enseñanza.

En este ejemplo, la actividad parecería estar dada por el trabajo con polígonos convexos, la cual involucra el conocimiento de sus diagonales con la intención de detectar un patrón.

Carmen Sessa (2005) analiza, para la enseñanza secundaria, la producción de fórmulas para contar colecciones y se detiene especialmente en:

*«**El cálculo de la cantidad de diagonales de un polígono de n lados** […] Hay varias maneras de pensar este problema, por ejemplo:*

- *Cada vértice "hace diagonal" con todos los que no son sus vecinos. Esto significa que cada vértice forma diagonal con n - 3 vértices. Como hay n vértices, tendríamos la fórmula n (n - 3). Pero como dos puntos determinan una única diagonal t así lo estaríamos contando dos veces, la fórmula es 1/2 n (n - 3).*
- *Cada vértice se asocia con todos los otros, lo cual da 1/2 n (n - 1) segmentos distintos con extremos en los vértices. Pero dos vértices contiguos determinan un lado, no una diagonal. Por eso hay que restarle la cantidad n de lados. La fórmula que se obtiene es 1/2 n (n - 1) - n».*

En el ejemplo que se presenta en el programa escolar se hace referencia a los procedimientos de resolución de los niños, se plantea que: *«La lectura del cuadro implica que los alumnos comiencen a pensar la relación que se establece entre el número de vértices y de diagonales desde un vértice»* (p. 386).

Coincidimos con Fripp (2009:49) cuando propone:

«La producción de fórmulas para contar colecciones debe entenderse como una necesidad planteada por un problema y como una elaboración realizada por el alumno.

La fórmula para el cálculo de diagonales de un polígono es una fórmula que ha "seducido" desde siempre (a los docentes)*, pero que en la mayoría de los casos no es producida por los alumnos».*

Más adelante, en el programa escolar, se afirma: *«Los alumnos estarán en condiciones de comprender la expresión algebraica de la relación que hay entre el número de diagonales desde un vértice de un polígono y el número de vértices de dicho polígono»* (p. 387).

La ejemplificación que se está analizando nos habilita a cuestionar, nuevamente, cuál es la intención o propósito fundamental de la inclusión del Álgebra en la escuela primaria: ¿es la producción de expresiones algebraicas formales o es comenzar a pensar algebraicamente?

¿Cuáles son los elementos que justifican la comprensión de la expresión algebraica de la relación entre vértices y diagonales, a partir del dibujo y el conteo?

¿Cómo valida un alumno escolar que la cantidad de diagonales encontrada es verdadera?

La forma de hacerlo es empírica, con lo cual se estaría perdiendo la esencia y potencia del Álgebra.

«Gran parte del poder tradicional del álgebra se sustenta en las operaciones lógicas internas libres de referentes que permite su uso (…) No obstante, como ya hemos mencionado, ni los formalismos ni las acciones que sobre ellos se llevan a cabo pueden aprenderse de una forma viable sin tener en cuenta un punto de partida semántico…» (Kaput, 1996)

Otra de las ejemplificaciones que brinda el programa escolar propone *«Contenido: El patrón. El número generalizado. Las expresiones de relaciones de doble»* (p. 388).

¿Qué se pretende enseñar con esta actividad? ¿Cuál es su objetivo?

Nuevamente encontramos cierto grado de confusión entre lo que se pretende enseñar y la actividad misma. En esta ejemplificación se hace necesario que el alumno exprese una relación, esa es la excusa para trabajar ¿qué contenido matemático?

Al analizar didácticamente la actividad podríamos plantear que si el contenido matemático es el patrón, se podría estar haciendo referencia al registro del patrón, utilizando el número generalizado como objetivo de enseñanza.

En la propia consigna de la actividad se plantea: *«Analiza los datos y explicita por escrito la relación entre los números de la columna 1 y la columna 2».*

La relación existente entre las columnas mencionadas es de doble y mitad, cada uno de los números de la primera columna es la mitad del correspondiente número de la segunda columna. Consideramos que nuestra última oración es una explicitación por escrito de la relación entre dichos números. Si también tenemos en cuenta una parte del texto propuesto en la ejemplificación, que dice: *«De la confrontación de justificaciones se conducirá el razonamiento del grupo para expresar la relación numérica entre los números de ambas columnas»*, nos preguntamos: ¿qué tipo de relación se espera que formulen los alumnos?

Alcanzaría con que los alumnos dijeran:

- "cada número de la segunda columna se obtiene multiplicando por dos a los de la primera columna",
- "obtenés un número par multiplicando por dos al 1, o al 2, o cualquier otro de esos números".

Cualquiera de estas expresiones se constituye en una expresión general que representa una relación.

«Cuando se generaliza, se abstrae aquello que es común y esencial a muchas cosas, y se lo comunica de forma tal que lo enunciado sea valedero para cada una de esas cosas y, por lo tanto, para todas ellas.» (Fripp, 2009:47)

Entonces, al generalizar se hace necesario, en primer lugar, detectar aquello que es común a muchas cosas y, en segundo lugar, elegir una forma para comunicar o explicitar la regularidad encontrada.

Para quinto grado se plantea (p. 389) una actividad como ejemplificación, en un contexto numérico. Como contenido se propone: *«La variable como expresión del número generalizado. Las expresiones de relación en el número par e impar»*.

En toda actividad matemática se hace necesario analizar ciertas cuestiones que ofician como variables didácticas, cuestiones que pueden bloquear o favorecer procedimientos específicos de los alumnos.

En la actividad que nos ocupa en este momento se vuelve pertinente analizar la consigna como variable didáctica. La secuencia numérica presentada podría considerarse muy elemental para un alumno de quinto año, tanto por el dominio numérico como por la relación entre los números intervinientes, por lo que al pedir: *«Busca una expresión que represente la secuencia anterior y anota las evidencias de esa apreciación»*, es esperable que los alumnos reconozcan que los números varían de dos en dos, que son los números pares no nulos, que son los números que a partir del dos se obtienen sumando 2 al anterior, etc.

Cuando el texto dice: *«La confrontación de las anotaciones realizadas permitirá la reflexión matemática sobre la relación n + 2 en la serie que se está trabajando»*, genera en nosotros algunas interrogantes: ¿a qué reflexión matemática se hace referencia?, ¿pensar en series numéricas de "dos en dos"?, ¿qué significado se le está dando a la expresión algebraica n + 2?, ¿cuál es el significado de "n" para el niño?

Si la letra "n" se considera como una variable de dominio natural, la expresión "n + 2", ¿qué representa? Sin lugar a dudas se convierte en una expresión general de números diferentes a los que representa "n + 2" cuando "n" simboliza al "número anterior".

Existe cierto salto de representación entre las dos partes de la consigna de esta actividad; el segundo momento se inicia con una expresión del tipo: *«Si n representa un número natural, busca una expresión: …»*

Se hace necesario destacar que este pedido enfatiza cuestiones referidas a la sintaxis del lenguaje algebraico. ¿Qué nos ofrece un alumno al representar el número siguiente con la letra ñ (letra que en nuestro alfabeto 'es la siguiente a la n')? Volvemos a poner un punto de atención en la posible pérdida de significados.

Consideramos, además, que con esta segunda parte de la actividad, se pierde el contenido explicitado al inicio.

Algunas reflexiones

A los efectos de establecer relaciones entre los distintos componentes del programa escolar rescatamos el planteo de promover la formulación de ciertas generalizaciones, tomando como escenarios algunos de los que aparecen en la tabla de contenidos.

Con el propósito de que los colectivos docentes continúen interrogando el texto programático y enriquezcan las propuestas de enseñanza aportamos el planteo de Cristianne Butto y Teresa Rojano. Ambas son reconocidas investigadoras que tienen múltiples producciones entre las que destacamos las referidas a la introducción temprana al pensamiento algebraico.

Estas autoras parten de la base de que *«alcanzar el pensamiento algebraico para desarrollar algunas ideas y alcanzar la formalización algebraica son actividades cognitivas distintas. La formalización algebraica requiere, ciertamente, un proceso mucho más largo y complejo, pero tener acceso al pensamiento algebraico en edades tempranas por diversas rutas nos otorga indicios empíricos y teóricos para analizar esta actividad matemática con una perspectiva epistemológica y didáctica»* (pp. 119-120). En ese marco sostienen el valor de desarrollar ciertas ideas vinculadas con los procesos de generalización y con la proporcionalidad.

El diagrama presentado por Butto y Rojano (Fig. 3) pretende dar cuenta de las posibles "rutas de acceso" en el nivel de la enseñanza primaria.

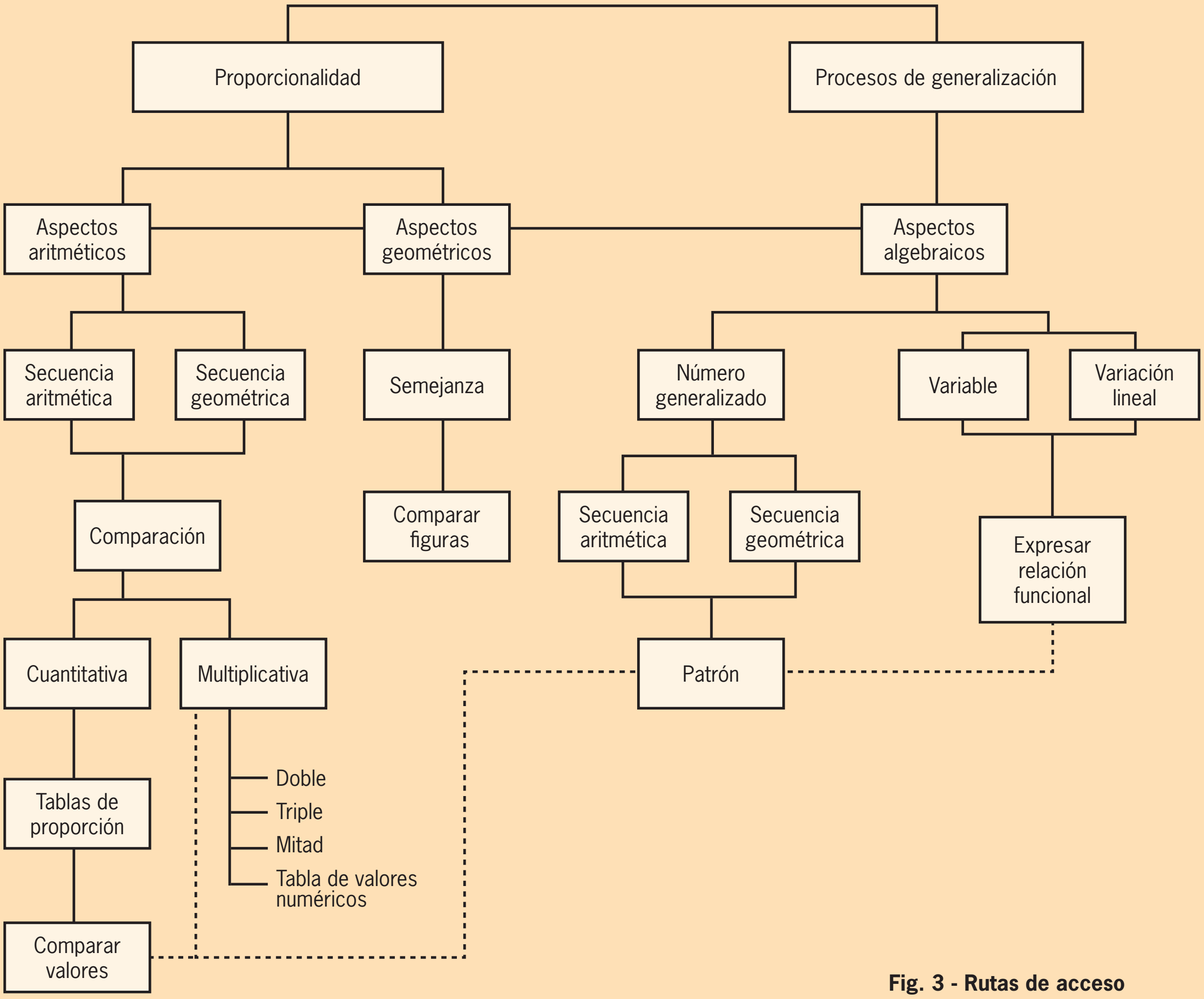

Fig. 3 - Rutas de acceso

Basándonos en este esquema nos parece importante destacar que los procesos de generalización y la proporcionalidad son vías de entrada que permiten el trabajo de algunas ideas algebraicas.

El diagrama, pensado por las autoras como rutas de acceso, presenta algunas cuestiones a tener en cuenta en un posible recorrido en el nivel de la escuela primaria.

Butto y Rojano dejan de lado los simbolismos formales en este esquema.

Al analizarlo identificamos un punto de apoyo con fuerte presencia en la escuela: la proporcionalidad. El esquema habilita la vinculación de este contenido programático con los procesos de generalización, por lo que el número generalizado, el patrón o la variable pueden estar presentes en el trabajo con alguno de los aspectos de la proporcionalidad.

Consideramos, además, la posibilidad de ampliar las rutas de acceso incluyendo otras regularidades.

«El acercamiento más tradicional empieza por enseñar la sintaxis algebraica, haciendo énfasis en sus aspectos manipulativos. En este abordaje se empieza por enseñar las expresiones, ecuaciones y toda la manipulación alrededor de ellas, y se termina con la resolución de problemas mediante la aplicación del contenido sintáctico aprendido. En cuanto a las dificultades que enfrentan los estudiantes que trabajan con dicho abordaje, la principal crítica es que se introduce al niño en un simbolismo desprovisto de significado y de sentido, siendo que los niños vienen de trabajar con la aritmética, donde todos los símbolos poseen significados y los contextos de los problemas determinan mucho la manera de resolverlos.» (Butto y Rojano, p. 114)

Bibliografía

ANEP. CEP. República Oriental del Uruguay (2009): *Programa de Educación Inicial y Primaria. Año 2008*. En línea: http://www.cep.edu.uy/archivos/programaescolar/Programa_Escolar.pdf

BUTTO, Cristianne; ROJANO, Teresa (2004): "Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría" en *Educación Matemática*, Vol. 16, Nº 001, pp. 113-148. México: Santillana.

CARRAHER, David W.; SCHLIEMANN, Analúcia D.; BRIZUELA, Bárbara M.; EARNEST, Darrell (2006): "Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education" en *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87-115.

FRIPP, Ariel (2009): "¿Álgebra en la escuela primaria?" en Revista *QUEHACER EDUCATIVO*, Nº 93 (Febrero), Edición Especial: *El maestro como constructor de currículo*, pp. 45-50. Montevideo: FUM-TEP.

GALAGOVSKY, L. R. (1993): "Redes conceptuales: Base teórica e implicaciones para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias" en *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, Vol. 11, Nº 3, pp. 301-307. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

KAPUT, James J. (1996): "¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra?" en *UNO. Didáctica de las Matemáticas*, Nº 9 (Julio, Agosto, Setiembre): "El futuro del álgebra y de la aritmética". Barcelona: Ed. Graó.

MOLINA, Marta; CASTRO, Encarnación; AMBROSE, Rebecca (2006): "Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional" en *PNA*, Vol. 1, Nº 1, pp. 31-46.

MOLINA GONZÁLEZ, Marta (2006): "Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria". Tesis doctoral. Directores de la Tesis: Encarnación Castro Martínez; Enrique Castro Martínez. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. En línea: http://documat.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210

SESSA, Carmen (2005): *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

SOCAS ROBAYNA, Martín Manuel (ed.) y otros (1989): *Iniciación al álgebra*. Madrid: Ed. Síntesis.