

Geometría al 100%

Esther Alicia Moleri Duboué | Maestra. Montevideo.

El presente trabajo pretende ser una muestra de actividades del área de la geometría en la que se abordan, en su más pura extensión, los *contenidos geométricos* sin hacer intervenir a la *medición*. En nuestras propuestas escolares cotidianas es fácil encontrar trabajos que incluyen ambos contenidos a la vez: nociones geométricas con la medición incorporada, ya sea para obtener lados (segmentos) de figuras de determinada longitud o el trazado de ángulos de determinada amplitud. En otras ocasiones presentamos situaciones de construcción de figuras a nuestros alumnos, a partir de las cuales se les propone que averigüen el área o el perímetro. Las actividades que a continuación se documentan, no refieren a ello. En esta oportunidad, *la medida* queda excluida de los *planteos-problemas* propuestos a los niños. Si bien en alguna ocasión necesitarán recurrir a comparaciones, no se les exige en ninguno de los casos, la expresión numérica de esas cantidades de medida. La medición, reitero, no es el objetivo. Queda de esta forma justificada la elección del título como resumen del contenido esencial del presente compendio.

Clase: 5to Año

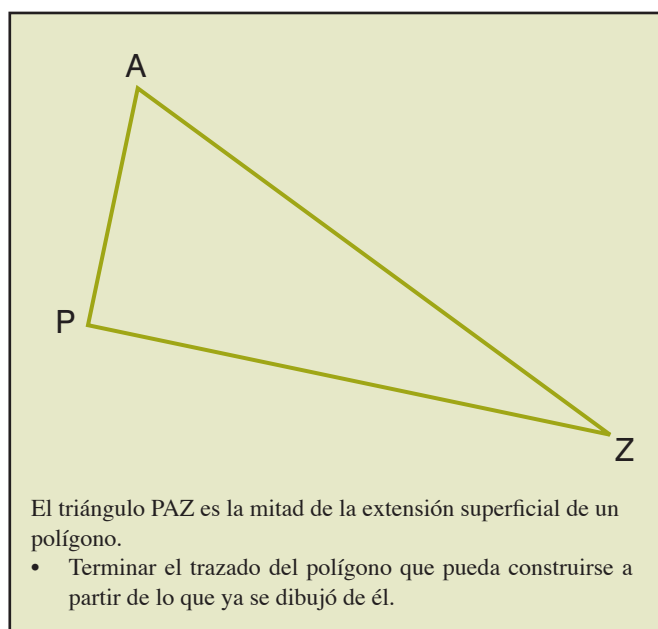
Objetivos de la actividad 1

- Poner en juego, a través de una situación de construcción, todos los conocimientos geométricos de las características y propiedades de las figuras involucradas en la tarea, así como estrategias de trazado necesarias que se vean involucradas en la misma.
- Comparar y analizar con los niños, las distintas soluciones que la situación admite.
- Promover futuros avances en las técnicas de trazado, revalorizando al compás como instrumento imprescindible para transportar distancias, y encontrar puntos equidistantes de otro tomado como referente.

Contenidos involucrados

- Polígonos.
- Elementos y propiedades de los polígonos (lados, ángulos, diagonales, ejes de simetría...).
- Extensión superficial.

Primera actividad



Procedimientos y respuestas que consideré probables

Para cumplir con lo que solicitaba esta actividad, consideré probable que la mayoría de los alumnos prescindiera del uso correcto de los instrumentos de geometría para el trazado de lo que solicitaba la consigna. Los alumnos se verían tentados a terminar el trazado a mano alzada, como confeccionando una figura de análisis, por lo que, previo a la entrega misma de la actividad, se haría especial hincapié en la necesidad del empleo de los instrumentos (sin especificar cuáles) que permitan alcanzar la solución, y en el uso de la estrategia de trazado que considerarían más pertinente.

En esta primera instancia, el maestro se limitaría a recorrer las mesas para ir evaluando los caminos emprendidos por los alumnos, y elaborando las estrategias que irá introduciendo en tanto las considere necesarias para promover avances, en la medida en que note que lo que consideró probable de antemano, se constata en los hechos.

A saber, entendí altamente probable que los alumnos

- procedieran a trazar un rectángulo a partir de la figura ofrecida;
- encontrarán como solución los dos triángulos isósceles que pueden admitirse como respuesta válida;

- no encontrarán en forma natural los otros polígonos solución (paralelogramo tipo y trapecioide) que la situación admite como resoluciones también válidas.

Si se confirmaba el supuesto de que no surgieran distintas soluciones y para enriquecer la etapa posterior de socialización, se conduciría el análisis a través de planteos como los siguientes:

- ¿Pueden trazarse polígonos de tres lados? Explorar los admisibles como correctos (dos soluciones).
- Buscar otra solución distinta a la que obtuvieron en la primera instancia y que se corresponda con un cuadrilátero.
- ¿Qué elemento de la figura solución es el segmento $\overline{AZ}$?
- ¿Y qué es $\overline{PA}$ en uno de ellos?
- Si consideramos al $\overline{PZ}$ como una de las diagonales de un cuadrilátero, ¿cuál se determinaría? (paralelogramo tipo)
- ¿Qué figura obtendríamos si consideráramos al $\overline{AZ}$ como diagonal de un cuadrilátero?

Una vez debatidas las posibles soluciones a los anteriores planteos, presentaría la segunda propuesta de la secuencia, la que admite una sola figura como solución (aunque también en alguna de las anteriores les estoy pidiendo determinación).

En el caso de que sí surgieran las distintas soluciones posibles, se compararían en la etapa de socialización, analizando las particularidades de cada uno y los procedimientos seguidos para su construcción.

Objetivos de la actividad 2

- Determinar un cuadrilátero: el *trapezoide*.
- Obtener el trazado del trapecioide a partir del manejo de la variable introducida en la consigna.
- Reconocer las características que lo identifican: lados consecutivos congruentes, diagonales no congruentes y perpendiculares, intersecadas ambas en su punto medio, y un solo eje de simetría.



Segunda actividad

Traza la figura que pueda determinarse a partir de los datos de la consigna N° 1 y de este otro:

- $\overline{AZ}$ pertenece al eje de simetría del polígono solución.

Posibles procedimientos

Consideré altamente probable que los alumnos

- reconocieran e identificaran cuál era la solución del problema, pero que encontraran dificultades en el momento del trazado;
- recurrieran a procedimientos de trazados imprecisos, desatendiendo lo imprescindible de la perpendicularidad para alcanzar la simetría;
- emplearan el compás para encontrar el vértice opuesto a P, mientras que otros lo harían empleando la regla iterada;
- emplearan el recurso de plegar la hoja de papel entregada para encontrar la perpendicular, puesto que es una estrategia otras veces empleada y socializada para su conocimiento grupal;
- usaran la escuadra para trazar la perpendicular al eje y que contenga a P (la otra diagonal del trapecioide).

Consideré muy probable que algunos niños

- lograran el trazado con relativa suficiencia, empleando principalmente la escuadra (por dos razones: es el instrumento que les resulta más práctico para trazar perpendiculares y no tenemos compases para todos);
- lograran el trazado de la figura solución.

Fundamentación acerca de la selección de figuras

Para la realización de estas actividades seleccioné los polígonos de tres y cuatro lados, porque es con los que actualmente estamos profundizando conceptualmente en clase. El trabajar con los elementos constitutivos, con las características particulares, con las propiedades que permiten identificar a unos o a varios polígonos produce en los alumnos, un mayor dominio del campo conceptual en el área.

Era frecuente constatar que los alumnos

no reconocieran en una figura, características comunes a otras. Por citar un ejemplo, el caso del cuadrado es uno de los más comunes. Los alumnos no distinguían que tal figura además es un rectángulo, y es paralelogramo, y es rombo, y es cuadrilátero, y es polígono. Del mismo modo costaba hacerles ver que un triángulo, además de ser obtusángulo, puede ser al mismo tiempo isósceles, o escaleno, y que un triángulo rectángulo puede ser escaleno o isósceles, pero nunca equilátero. El tema de *relaciones de inclusión* está aquí presente.

Desde otro aspecto nos estamos introduciendo en la temática de las proyecciones en el plano y en el espacio, y explorando las particularidades de la simetría axial. Por tales razones entendimos pertinentes estas propuestas.

Análisis de lo que realmente sucedió con la primera actividad

En cuanto a las figuras solución

Como lo había previsto, la mayor cantidad de respuestas ofrecidas como solución se correspondieron con el rectángulo (60%).

Se dio el caso de que cuatro alumnos sintieron la curiosidad de encontrar más de una respuesta, aunque la consigna no dejaba entrever tal posibilidad. Dos de ellos pudieron encontrar cuatro polígonos solución. Tal situación no la consideré probable en el análisis previo de las posibles respuestas.

La segunda figura que surgió en orden proporcional fue el triángulo que podía trazarse a partir de tomar como eje de simetría a su altura $\overline{PZ}$. Se obtenía así un triángulo isósceles acutángulo. Siete alumnos encontraron esa solución.

Seis niños (30%) trazaron el triángulo isósceles obtusángulo que podía obtenerse si tomaban al $\overline{PA}$ como su eje de simetría (y su altura con respecto al lado de mayor longitud).

También en un alumno se dio la respuesta “paralelogramo tipo” al considerar al $\overline{PZ}$ como una de las diagonales de dicho cuadrilátero. No creí posible que lo descubrieran, ya que exige un mayor nivel de abstracción, pero se constató tal solución: ¡siempre hay niños que nos sorprenden! Somos los docentes quienes a veces los subestimamos.

Ningún alumno identificó al romboide como una de las posibles respuestas al problema. Esto sí fue previsto.

En cuanto al trazado y a los procedimientos

También, como lo preví, ocurrió que muchos alumnos se vieron tentados a presentar la o las soluciones que esta primera actividad solicitaba, por simple trazado a mano alzada, como al construir figuras de análisis que muy frecuentemente emplean. Ante tal situación intervine solicitando que usaran los útiles de geometría necesarios (sin especificar cuáles) para que la figura pudiera estar trazada con la mayor corrección posible. Fue entonces cuando muchos niños optaron por la escuadra para obtener el ángulo recto del rectángulo que encontraron como figura posible de construir. Otros decidieron emplear la regla iterada para transportar distancias: primero para continuar el trazado de la recta que incluía a uno de los lados del triángulo del cual se debía partir para trazar la siguiente figura, y después para respetar las distancias al eje de simetría.

Cinco alumnos emplearon el compás para transportar segmentos, aunque dos de ellos no lo utilizaron con la finalidad pertinente a lo que necesitaban obtener.

Algunos alumnos, si bien manejaban la idea de la solución posible, no pudieron alcanzar un nivel satisfactorio de trazado. No tuvieron presente qué instrumento era el más adecuado para obtener mayor precisión y tampoco manejaron con cuidado lo que solicitaba la consigna.

Análisis de lo que realmente ocurrió en la segunda propuesta

Debemos dejar especificado con anterioridad al análisis de esta segunda actividad que, para que pudiera ser realizada, se solicitó a los alumnos que calcaran (en otra hoja de papel sin renglones) el triángulo PAZ ofrecido en la consigna N° 1, porque sería a partir de él que deberían resolver esta nueva propuesta. Realizada esta precisión, entregué la hoja en la que deberían trazarla junto con la nueva consigna escrita que ampliaba la información sobre la figura que ahora deberían construir.

Paso seguido nos dispusimos a observar nuevamente lo que ocurría en las mesas de trabajo.

En cuanto a la figura solución

El 100% de los alumnos que realizaron la actividad pudo reconocer que la única figura

que servía como respuesta a la nueva consigna era el trapecioide aunque, obviamente, las diferencias se notaron en los trazados a la hora de construirlo. Tal situación fue prevista.

En cuanto al trazado y a los procedimientos

El 55% de los alumnos alcanzó el trazado en forma satisfactoria.

Dentro del grupo de los que no alcanzaron el trazado con corrección hubo diferentes niveles. Unos fueron capaces de reconocer que la distancia entre el vértice que debían encontrar y el segmento que se ofreció como perteneciente al eje de simetría de la figura, debía ser la misma que la que existe entre el vértice P y dicho eje. Y usaron el compás para trasladar esa distancia, o la regla iterada, pero no lo hicieron sobre una perpendicular al eje de simetría. Allí radicó su imprecisión. El *obstáculo epistemológico* en pleno: no tener presente que la perpendicularidad resulta imprescindible a la hora de encontrar puntos simétricos en distintos semiplanos.

Otros alumnos, dentro de ese mismo grupo que no logró el trazado en forma aceptable, fueron los que no tuvieron en cuenta ni la perpendicularidad ni la equidistancia.

Dentro del grupo de los alumnos que alcanzaron un nivel satisfactorio encontramos distintos procedimientos entre los que pudo constatare:

1. el plegado para obtener la perpendicular al eje y luego para encontrar el vértice restante;
2. el plegado solamente para obtener -luego de observar el dibujo a trasluz- el cuarto vértice del cuadrilátero;
3. el empleo de la escuadra para trazar la perpendicularidad al eje de simetría;
4. el empleo del compás para encontrar el vértice simétrico;
5. el uso de la regla iterada (o de la escuadra) para transportar distancias.

Consideraciones finales. Reflexiones

Fue notorio que ningún alumno trazó la perpendicular al eje de simetría con regla y compás. Al respecto cabe señalar que, si bien hemos empleado este método para construir la mediatriz de un segmento y para obtener perpendiculares que, a su vez, permitan el trazado de ángulos rectos (sin la escuadra) para construir rectángulos o cuadrados, resultaba



muy poco probable que lo identificaran como procedimiento válido para encontrar la perpendicular necesaria en este último desafío, puesto que, en este caso, exigía además que debía incluir el vértice P del triángulo PAZ.

Los alumnos escogieron caminos que consideraron más firmes; emplearon el recurso que conocían como el más apropiado (¿o económico?) para la ocasión: la escuadra.

Constatamos, entonces, una vez más y a partir de una situación que admitía ser resuelta a través de distintos procedimientos, cómo es posible promover avances en instancias posteriores, en la etapa de *socialización*. En ella, los alumnos explicaron a sus compañeros cómo alcanzaron la solución (*comunicación*) y, en este intercambio, en la comparación de estrategias, los avances se dieron naturalmente, sin imposiciones externas ni verticales del que sabe más al que sabe menos, sino desde niveles próximos de desempeño, en un clima de trabajo participativo y de verdadera construcción.

Fue mi responsabilidad, en la etapa siguiente, durante la *institucionalización*, guiar el proceso a través de preguntas que hicieron poner en evidencia todos los conocimientos que los niños fueron empleando para que pudieran alcanzar la solución a cada problema. Es como que hacemos exterior, explícito, lo que se manejó internamente, a nivel cognitivo. Hacemos notar, ponemos de manifiesto lo que tal vez manejaron sin ser conscientes y acercamos aquel conocimiento, herramienta, procedimiento o recurso que, aun conociéndolo, no fue utilizado en esta ocasión como, por ejemplo, el saber trazar mediatrices de segmentos.

Obviamente que para alcanzar tal grado de desempeño nos deberemos acercar en reiteradas oportunidades a ese saber (*frecuentación*), entendiendo de antemano que siempre serán aproximaciones, cada vez más complejas, sí, pero nunca acabadas.

De todas formas, los objetivos que nos habíamos planteado para estas actividades se cumplieron en el grado previsto.

Proyecciones

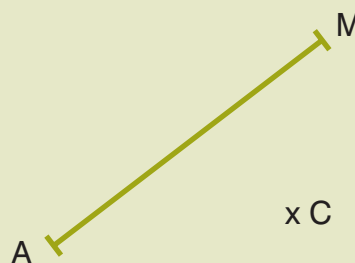
Continuaremos la secuencia, aprendiendo a trazar perpendiculares a una recta que incluya un punto exterior a ella, empleando regla y compás. Entendemos que hay procedimientos

de trazado que *deben enseñarse*, puesto que resultan algo complejos para ser descubiertos por libre exploración.

Se plantearán, además, otros desafíos de trazado a partir de consignas similares que permitan variadas soluciones en el comienzo, pero que las mismas se reduzcan a una sola al final.

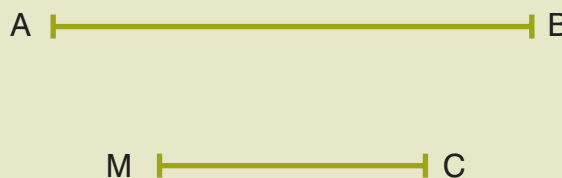
A continuación adjunto algunas de las propuestas que tengo elaboradas para plantear a los alumnos en próximas instancias, y que responden a la tipología de actividades presentadas en este informe.

Actividad 1: $\overline{AM}$ es una de las diagonales de un cuadrilátero y C uno de los extremos de la otra diagonal. Traza la figura que atienda a estas pistas.



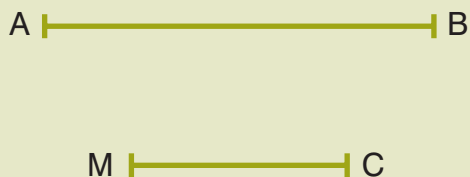
Actividad 1': $\overline{AM}$ pertenece al eje de simetría de la figura. Traza el cuadrilátero que cumple con las pistas de la Actividad 1 y 1'.

Actividad 2: $\overline{AB}$ es uno de los lados de un triángulo y $\overline{MC}$ su altura. Trázalo.



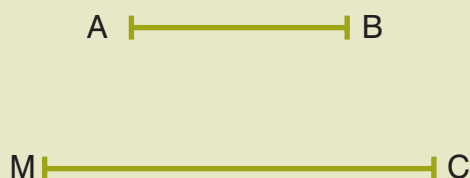
Actividad 2': Sabiendo que $\overline{MC}$ pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, y M al segmento $\overline{AB}$, traza el triángulo que se determina con esta nueva pista.

Actividad 3: $\overline{AB}$ es uno de los lados de un cuadrilátero y $\overline{MC}$ la altura respecto a $\overline{AB}$. Traza el cuadrilátero que cumpla con esta característica.



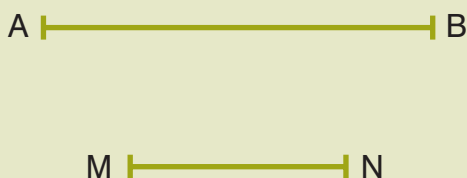
Actividad 3': Las diagonales de dicho cuadrilátero son perpendiculares y se intersectan ambas en el punto medio.

Actividad 4: $\overline{AB}$ y $\overline{MC}$ son dos de los lados de un cuadrilátero. Traza todos los que puedas con estos datos.
¿Cuáles cuadriláteros sabes de antemano que no podrás representar con los segmentos dados?



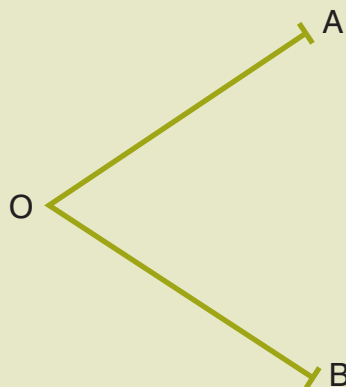
Actividad 4': Si dichos lados son consecutivos y determinan un ángulo recto, ¿cuáles cuadriláteros se pueden obtener?

Actividad 5: $\overline{AB}$ es uno de los lados de un polígono y $\overline{MN}$ es la paralela media entre $\overline{AB}$ y su paralelo. Traza la o las figuras que cumplan con estas condiciones.



Actividad 5': $\overline{MN}$ determina con el lado $\overline{AB}$ un ángulo equivalente a medio recto. ¿Qué figura puede trazarse a partir de este nuevo dato? Trázala y compara el polígono que obtuviste con el que obtuvo tu compañero, superponiéndolos a trasluz.

Actividad 6: $\angle AOB$ es el ángulo que determinan las diagonales de un cuadrilátero. Trázalo a partir de ellas, sabiendo que A y B son dos de los vértices de dicho cuadrilátero.



Actividad 6': Si a la consigna anterior le agregamos esta nueva condición: “Lo que le falta trazar de c/u de las diagonales es el doble de lo que ya se dibujó”, ¿qué cuadrilátero queda así determinado? Trázalo.

Síntesis final

Para finalizar esta presentación decidí citar un pasaje del artículo que escribiera, en la Revista *QUEHACER EDUCATIVO* N° 68 (2004), María del Carmen Curti -profesora a quien le tengo un admirable respeto por todo lo que ella significó en mi carrera como docente y por todo lo que le debo junto a las profesoras Liliانا Pazos y Graciela Aramburu- por resumir, en esencia, el contenido y el enfoque de lo que anteriormente se expuso.



«[...] Las propuestas (...) parten de un enfoque que considera que la enseñanza de la Geometría debe tener las características siguientes:

- a) Presentación no ostensiva, priorizando el significado sobre el significante para promover la construcción de conceptos, trascendiendo las necesarias representaciones del mismo.
- b) Proponer una geometría dinámica, exploratoria, experimental, que permita al alumno plantear interrogantes, formular hipótesis que deberá confirmar o descartar. De acuerdo con esto deberá ofrecer oportunidades para que los propios alumnos puedan confirmar sus afirmaciones a través de procedimientos exploratorios que incluyan plegado, recortado, encastrado, superposición, trazado, discusión en torno a figuras de análisis, aplicación de propiedades anteriormente confirmadas para llegar a nuevas conclusiones, entre otros procedimientos posibles.
[...]
- c) Proponer los conceptos geométricos en un entramado

de relaciones que deje de lado las clasificaciones excluyentes para favorecer la construcción de vínculos y las inclusiones.

- d) Plantear verdaderos problemas que obliguen a los alumnos a seleccionar, jerarquizar y ordenar los conceptos geométricos que poseen, para poder resolver la situación.
- e) Privilegiar la apropiación de las características y propiedades de una figura frente a la adquisición de nombres particulares que impiden reconocer las diferentes figuras que pueden identificarse con esa denominación.
[...]
- f) Buscar problemas que permitan razonar, argumentar, fundamentar, afirmar o rebatir, a partir de las propiedades de las figuras y de conceptos geométricos. Las propiedades de las figuras permiten caracterizarlas sin remitirse a la medida y al cálculo, aunque ambos aspectos estén estrechamente relacionados con la Geometría.»¹

¿Qué más se puede agregar?! Solo la...

...Bibliografía

ANEP. MECAEP. República Oriental del Uruguay (1997): *Matemática. Especificaciones y sugerencias didácticas*.

ANEP. MECAEP. República Oriental del Uruguay (1999): *Propuesta Didáctica. El material didáctico como mediador en los procesos de enseñar y de aprender*. Editorial Rosgal.

ASTOLFI, Jean-Pierre (1999): *El "error", un medio para enseñar*. Sevilla: Díada Editora.

BELCREDI, Luis; ZAMBRA, Mónica (2001): *Gauss 1. Matemática para el primer año liceal*. Montevideo: La Flor del Itapebí.

BERTHELOT, René; SALIN, Marie Hélène (1993/94): "La enseñanza de la geometría en la Escuela Primaria" en *Revista Grand N*, N° 53. París.

CHAMORRO, María del Carmen (2003): *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson Educación.

CHARNAY, Roland (2005): "En busca del sentido". Traducción autorizada por el autor: Ma. Alicia Xavier de Mello. Revisión de traducción: Prof.ª Ana María Brandes. En *Revista QUEHACER EDUCATIVO* N° 74: "El PROBLEMA y la PROBLEMATIZACIÓN en la intervención docente", Edición Especial (Diciembre), pp. 92-94. Montevideo: FUM-TEP.

CURTI, María del Carmen (2004): "Propuestas para evaluar Geometría en el 2° nivel" en *Revista QUEHACER EDUCATIVO* N° 68: "Evaluación", Edición Especial (Diciembre), pp. 89-90. Montevideo: FUM-TEP.

E. R. (2001): "Conocimientos espaciales y geométricos. Para ir pensando actividades" en *Revista QUEHACER EDUCATIVO* N° 45: "PLANIFICACIÓN 2", Edición Especial (Febrero), p. 70. Montevideo: FUM-TEP.

EQUIPO DE REDACCIÓN (2005): "Un modelo de enseñanza: la situación-problema" en *Revista QUEHACER EDUCATIVO* N° 74: "El PROBLEMA y la PROBLEMATIZACIÓN en la intervención docente", Edición Especial (Diciembre), pp. 106-108. Montevideo: FUM-TEP.

FELDMAN, Daniel (2003): "Ayudar a enseñar. Relaciones entre didáctica y enseñanza" en *Revista QUEHACER EDUCATIVO* N° 62: "PLANIFICACIÓN 4", Edición Especial (Diciembre), pp. 95-96. Montevideo: FUM-TEP.

JUANCHE, Ana (2003): "Clasificación de paralelogramos a partir de las diagonales" en *Revista QUEHACER EDUCATIVO* N° 62: "PLANIFICACIÓN 4", Edición Especial (Diciembre), pp. 68-73. Montevideo: FUM-TEP.

LERNER, Delia; SADOVSKY, Patricia (1994): "El sistema de numeración: un problema didáctico" en C. Parra; I. Saiz (comps.): *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Ed. Paidós Educador.

RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz (2005): "Análisis didáctico" en *Revista QUEHACER EDUCATIVO* N° 72 (Agosto), pp. 25-33. Montevideo: FUM-TEP.

RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz (2005): "Concepciones, errores y obstáculos... y sus vinculaciones con las propuestas de enseñanza en Matemática" en *Revista QUEHACER EDUCATIVO* N° 74: "El PROBLEMA y la PROBLEMATIZACIÓN en la intervención docente", Edición Especial (Diciembre), pp. 95-98. Montevideo: FUM-TEP.

RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz (2006): "La producción de conocimiento en el marco de la Didáctica de la Matemática. Fundamentos y notas para una experiencia de docentes uruguayos" en *Revista QUEHACER EDUCATIVO* N° 76 (Abril), pp. 42-46. Montevideo: FUM-TEP.

SANTANA, Gabriela; AMBROSIO, Andrés (2006): "Propiedades de los paralelogramos. Análisis de una secuencia de actividades para el abordaje del contenido a nivel escolar" en *Revista QUEHACER EDUCATIVO* N° 79 (Octubre), pp. 29-36. Montevideo: FUM-TEP.

SILVA PALUMBO, Alicia; RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz (2001): "Geometría: Una propuesta para las clases superiores" en *Revista QUEHACER EDUCATIVO* N° 45: "PLANIFICACIÓN 2", Edición Especial (Febrero), pp. 66-69. Montevideo: FUM-TEP.

VERGNAUD, Gérard; RICCO, Graciela (1985): "Didáctica y adquisición de conceptos matemáticos. Problemas y métodos" en *Revista Argentina de Educación* N° 6. Buenos Aires: AGCE.

XAVIER DE MELLO, Ma. Alicia (2002): "Geometría II. Plantear problemas en las clases intermedias y superiores para seguir avanzando en la construcción de estos conceptos" en *Revista QUEHACER EDUCATIVO* N° 51 (Febrero), pp. 65-68. Montevideo: FUM-TEP.

XAVIER DE MELLO, Ma. Alicia (2006): "Contenidos de enseñanza en Matemática" en *Revista QUEHACER EDUCATIVO* N° 80: "CONTENIDOS de ENSEÑANZA", Edición Especial (Diciembre), pp. 40-44. Montevideo: FUM-TEP.

¹ Ma. del C. Curti (2004:89-90). El subrayado es nuestro.