

La forma de las cosas grandes

Martín Reiris | Doctor en Matemáticas. Actualmente es *Moore Instructor* en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), Boston, EEUU.

Alberto recorrió dos leguas hasta su casa, en su lenta yegua blanca. Acompañado por el calor de diciembre, imaginaba el inminente verano, los baños en el arroyo, la visita de sus primas en enero, y también, y finalmente, el tiempo para desarmar el viejo tractor que su padre había decidido olvidar para siempre cerca del potrero. Alberto no sospechaba entonces que la leve inquietud que lo perseguía desde la mañana era ciertamente algo más. Pasó frente al arroyo y vio que estaba bajo. Pensó, solo por pensar, que sería bueno ir por mojarras. Más adelante, en la cima de la colina, la yegua se detuvo improvisamente. Vaciló un segundo y en ese lapso sintió que él también se detenía. Fijó su vista hacia el lado del interminable llano. Nunca se había podido figurar cuán lejos se extendería esa depresión. Sus primas le habían dicho que por su casa, que quedaba en esa dirección, había sierras; entonces, en algún momento se tendrían que ver mordeduras en el horizonte. Pero Alberto sabía que no era esa su preocupación. Absorto vio a la lejanía disolverse entre el aire caliente y el espejismo. Por vez primera sintió, en el campo, la soledad de la inmensidad. El abrazo de su madre que lo encontraría una legua más abajo, le dio más que motivación. A pocos pasos del caserío divisó, desinteresadamente, al viejo tractor hundido en la curvatura de la pradera. Escuchó el ladrido de los perros y sintió la cercanía de su madre. Dos horas más tarde, y casi secretamente, abrió el planisferio que le había prestado la maestra. Lo dispuso según los puntos cardinales,

y con su dedo pequeño siguió la dirección que él entendía era la de la verde llanura, las sierras de sus primas y más allá. No le importó confirmar que pronto encontraría el océano Atlántico, la costa sur de África, la India, la Polinesia, el océano Pacífico y, finalmente, otra vez su hogar. Practicó esa travesía imaginaria hasta el cansancio. Alguien incomprensivo diría que lo hacía neciamente. Al cabo, y maravillado, pensó que todas las cosas, aun las inconcebiblemente grandes como la Tierra, deben poseer alguna forma. No tardó en aplicar deliberadamente su principio morfológico. ¿Y cuál es la cosa más grande? La cosa más grande, razonó, no es la Tierra, sino el Universo. Entonces, si el Universo tiene forma, ¿cuál es la forma del Universo?

A muchos, la historia que acabamos de contar puede resultarles familiar. De hecho, la mayoría de nosotros ha reflexionado alguna vez (al menos vagamente) sobre la magnitud del Universo. Es probable también que, luego de ello, nuestra inquietud se haya diluido en las dificultades de los problemas cotidianos o simplemente en nuestro propio desinterés.

Pasado el deslumbramiento de sus audaces y profundas reflexiones, la suerte de Alberto pudo haber sido la misma. La humanidad ha meditado sobre similares disquisiciones desde épocas remotas, pero no es sino en el siglo veinte que el desarrollo científico permitió, por primera vez, abordar el problema, teórica y cuantitativamente. Describiremos más adelante cuáles fueron esos desarrollos pero, por

ahora, nos propondremos seguir la audacia de Alberto y asumir las consecuencias de su principio morfológico.

En primer lugar intentemos entender las formas bidimensionales. Dos de ellas, en particular, han marcado durante lustros el pensamiento geométrico de la humanidad. Dichas formas son el plano y la esfera (no nos referimos a la esfera sólida, sino a su superficie).

Es instructivo, pero inaccesible aquí, elaborar los varios puntos de vista desde los que estas dos formas han sido estudiadas. El plano, por ejemplo, fue abordado desde el punto de vista de las relaciones entre puntos, líneas, ángulos y círculos. Dicha área se denomina “Geometría Euclidea” en honor a Euclides, matemático griego, quien alrededor del año 300 a. C. escribió una serie de trece volúmenes conocidos como *Los Elementos de Euclides* (dichos tratados constituyen en sí una de las obras más influyentes en la historia occidental). En el tomo decimotercero, Euclides describe cinco axiomas, caracterizando así la geometría planar. El quinto, en particular, reza lo siguiente:

Si dos rectas cortan a una tercera formando dos ángulos interiores (a y b en la figura 1) cuya suma es menor a 180°, entonces las dos rectas originales necesariamente se cortan y lo hacen hacia el lado al que pertenecen los ángulos interiores.

Tan natural es este axioma que invita a la siguiente pregunta: ¿es necesario el quinto axioma, o es una propiedad de la geometría planar que puede deducirse de los cuatro primeros axiomas? De aspecto algo inocente, esta pregunta es de hecho profunda y central. Más de dos mil años transcurrieron hasta su respuesta definitiva. Fue en la tercera década del siglo diecinueve cuando János Bolyai (Hungría) y Nicolái Lobachevsky (Rusia) demostraron (por separado) que el quinto axioma es independiente de los anteriores, y lo hicieron construyendo explícitamente una “geometría” (denominada Geometría de Bolyai-Lobachevsky) que satisface los primeros cuatro axiomas, pero no así el quinto.¹ La noción de punto, recta y ángulo que brindaron se explica en la Figura 1.

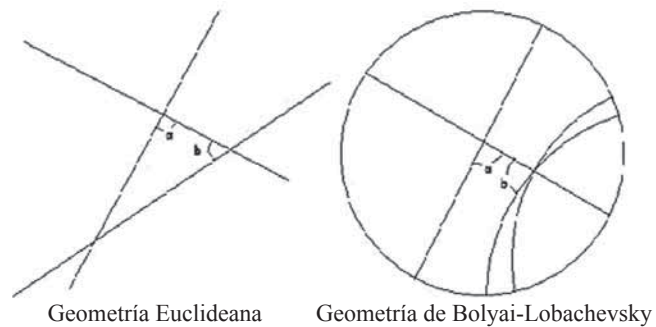


Figura 1 (izquierda): De acuerdo al quinto axioma de Euclides, si dos rectas cortan una tercera formando ángulos a y b, cuya suma es $a + b < 180^\circ$, entonces dichas rectas se cortan hacia el lado al que pertenecen los ángulos a y b.

Figura 1 (derecha): En la Geometría de Bolyai-Lobachevsky, la noción de “recta” es representada por: (I) arcos perpendiculares a un arco exterior fijo (que en sí encierra todo el disco de Lobachevsky) o (II) por diámetros, es decir, segmentos que pasan por el centro. En la figura se ven, en particular, cuatro de estas “rectas” (dos diámetros y dos arcos). La noción de “ángulo” es la misma que la Euclidea, como se aprecia en la figura. Nótese, en cambio, que claramente el quinto axioma de Euclides falla.

Pero regresemos de este interludio (como veremos, importante) a la discusión original de las formas bidimensionales. Intentemos entender aquellas formas que no se extienden indefinidamente, en clara oposición al plano que sí lo hace.

Para evitar confundirnos con nuestras propias palabras, hagamos una prudente convención en nuestra terminología, ya que las palabras superficie o forma poseen un significado usual muy diferente al que aquí le estamos dando. Consideremos, por ejemplo, una pelota de fútbol y una pelota de rugby. La convención será decir que ambas representan a la misma “superficie” o “forma” (en este caso, a la abstracta “esfera”), pero que poseen diferentes “geometrías”.²

Del mismo modo, la superficie de una pera es la misma que la superficie de una sandía o una nuez, pero su geometría es ¡claramente diferente!

Ahora bien y continuando, ¿cuáles son todas las posibles superficies?

¹ Al escribir su tratado geométrico en forma axiomática, Euclides hizo de hecho mucho más que simplemente listar en forma clara y rigurosa las relaciones más elementales entre las nociones que todos tenemos de punto, recta, círculo y ángulo. Implícitamente (o explícitamente tal vez) decía que una “geometría” (de manera abstracta) es cualquier conjunto de nociones (ino necesariamente las usuales) de “punto”, “recta”, “círculo” y “ángulo”, que satisface los axiomas dados de la geometría. Lo que Bolyai y Lobachevsky comprobaron es que, si el quinto axioma de Euclides se elimina (pero dejando los restantes), entonces hay otras geometrías que no son la Euclidea.

² Los matemáticos llaman a la equivalencia en las “formas” (y no en la geometría), “equivalencia topológica”.

Comencemos por construir una que sea diferente a la abstracta esfera. Para ello dibujemos, en una hoja de papel, un cuadrado cualquiera y recortémoslo. Hecho ello, peguemos dos lados opuestos. Obtenemos así un tubo con dos círculos como bordes. Peguemos ahora dichos círculos (doblando el tubo) de la manera más natural posible. A la forma que así se obtiene se la conoce como ‘Toro’ y es la que se muestra en segundo lugar en la Figura 2. Algún lector podrá decir que esa forma (el Toro) no es otra que la de la superficie de una taza con una sola asa, forma que todos bien conocemos. De acuerdo a nuestra convención, ello es correcto (el lector debe convencerse por sí mismo antes de seguir) y también lo es que ambas, sin embargo, poseen diferentes geometrías, ¡y muy diferentes! Tomemos a nuestra conveniencia el suspicaz comentario y observemos que la superficie de una taza con dos asas no es “igual” a la superficie de una taza con una sola asa (el Toro) o a la superficie de un vaso (que es la abstracta esfera). Lo mismo sucede si le agregamos aún más asas a la taza. Si las ordenamos ahora de acuerdo al número de ellas (lo que los matemáticos llaman “el género”), tenemos lo que se puede ver en la Figura 2.



Figura 2

Dichas formas, ¿son todas las posibles? La respuesta es afirmativa (pero la demostración es trabajo de matemáticos). Las superficies de la Figura 2 son técnicamente todas las posibles superficies que se llaman orientables.

¿Y cuáles son las posibles formas tridimensionales? Lo único que conocemos que tiene tres dimensiones es el mismo espacio en el que vivimos. Nos movemos hacia arriba o abajo, adelante o atrás, a un costado o a otro, y eso claramente indica tres dimensiones; pero ¿qué forma conocemos que tenga tres dimensiones? Alberto no cabría en sí mismo al escuchar esa pregunta y gritaría: ¡Maestra, yo, yo, yo! ¡El Universo, maestra, el Universo! Y se ganaría un ‘sote’, pero ¿cuál es la forma del Universo?

Desafortunadamente (o afortunadamente) las formas tridimensionales poseen extraordinaria complejidad matemática. No es sino recientemente que se ha podido dar de manera conclusiva una respuesta posible a la pregunta de cómo son las posibles formas tridimensionales. Para explicar cuáles fueron los modernos desarrollos que permitieron entender más este problema, debemos retraernos primero ¡al año 1854! Entonces, Bernhard Riemann (Alemania) propuso una nueva noción de geometría (hoy conocida como Geometría Riemanniana) generalizando vasta y definitivamente las geometrías bidimensionales, en particular a las geometrías de Euclides y de Bolyai-Lobachevsky. Una de las contribuciones de Riemann fue hacer aún más abstracto el concepto de Geometría (aunque parezca imposible) definiéndola como una propiedad intrínseca a las formas sin relación a nada más. Por ejemplo, una taza o una nuez le deben su geometría al solo hecho de estar dentro del espacio. Riemann propuso que las formas pueden tener geometría sin estar en sí dentro de nada, y además explicó la matemática que se necesita para tales geometrías.

El Universo en particular (que, de acuerdo a Alberto, es todo lo que hay y, por lo tanto, no está dentro de nada) puede tener geometría. Dejemos de lado, por el momento, este delicado pero importante punto.

Riemann, por su lado, era discípulo de Carl Gauss, destacadísimo matemático alemán quien, años antes, había estudiado comprensivamente la geometría de las superficies. Uno de los muchos conceptos que Gauss introdujo fue el de curvatura de una geometría, noción que ahora se conoce como “curvatura de Gauss”. Hoy sabemos (sin entrar en detalles) que una esfera con la geometría de, por ejemplo, un balón de fútbol, posee curvatura de Gauss igual a uno (si notamos a la curvatura de Gauss como K , entonces para la esfera, $K = 1$). También sabemos que la curvatura del plano euclideano es, y esto no debe extrañar a nadie, igual a cero. Del mismo modo sabemos que al Toro (superficie de género uno) se le puede dar una geometría, en el sentido intrínseco de Riemann, de curvatura de Gauss igual a cero ($K = 0$). Esta geometría es tan abstracta que el Toro no se podría ver con ella así como se ve en la Figura 2. Finalmente, a las superficies de género mayor se les puede dar

geometrías, también en el sentido que introdujo Riemann, de curvatura de Gauss igual a menos uno ($K = -1$). Otra geometría de curvatura menos uno es la geometría que descubrieron Bolyai y Lobachevsky.

Diremos en lo que sigue que, por ejemplo, la forma “Toro” admite una geometría de curvatura cero, si se le puede dar una geometría en el sentido de Riemann que tenga curvatura cero. Usaremos similares expresiones para las superficies de otro género.

Una propiedad esencial de las geometrías con $K = 1$, $K = 0$ o $K = -1$ es la siguiente: *si una superficie, que no sabemos de antemano cuál es en el exhaustivo listado de la Figura 2, admite una de ellas, entonces esa misma superficie no puede admitir una geometría de ninguno de los otros dos tipos.*

En particular, si una superficie admite una geometría de curvatura $K = 1$, esa forma tiene que ser necesariamente la abstracta esfera³. La importancia de esto es que ¡la geometría, al menos cuando $K = 1$, determina la forma!

En 1982, William Thurston (matemático estadounidense, actualmente en la Universidad de Cornell) propuso una alternativa geométrica para describir las formas tridimensionales. Lo que Thurston planteó es que cada forma tridimensional puede ser dividida en partes, cada una de las cuales admite una geometría riemanniana particular (no muy diferentes de hecho a las geometrías descritas anteriormente). Si la geometría es capaz de describir la forma, entonces, de acuerdo a Thurston, podemos entender las formas tridimensionales en su globalidad. La propuesta, conocida como la conjetura de Thurston, fue validada finalmente en el año 2002.

¿Y en qué ayuda todo esto a dar una respuesta a la pregunta de Alberto sobre cuál es la forma del Universo? Ayuda bastante, de hecho.

En 1916, Albert Einstein (Alemania) proponía su versión definitiva de la Teoría de la Relatividad General. Tomando no poco de las ideas de Gauss y Riemann, Einstein propuso (dicho de modo simple) que la gravedad es la manifestación de cómo el espacio y el tiempo se curvan. Dio una estructura matemática (esencialmente la creada por Riemann) y escribió, por primera vez, las leyes que gobiernan la geometría del espacio

y el tiempo. La teoría de Einstein representa un salto intelectual de una magnitud difícil de concebir. En 1918, Einstein fue el primero en aplicar la Relatividad General al Universo en su totalidad. La Relatividad General es así la primera teoría comprensiva que permite tratar el problema de la forma del Universo. En su primer modelo, Einstein asumió que, en su totalidad espacial, el cosmos tiene la forma de la esfera tridimensional. Aunque ese modelo, ahora conocido como el universo estático de Einstein, ha sido descartado muchas décadas atrás, permanece aún como un extraordinario ejemplo de audacia intelectual.

Pero ¿cuál es hoy la respuesta más plausible para la forma del Universo?

Aún no hay una respuesta concluyente a esa pregunta, pero los físicos que se ocupan del estudio del Universo (la Cosmología) han concluido mucho tiempo atrás que la curvatura (independientemente de la forma) debe ser proporcional a $K = 1$, a $K = 0$ o a $K = -1$.

La razón de ello radica en dos propiedades del Universo observable⁴, conocidas como “homogeneidad” e “isotropía”. Cuando los cosmólogos enfocan sus telescopios hacia la vastedad, ven miles de galaxias distribuidas de modo uniforme⁵ e independiente de la dirección en la que se observa. Más en general, dentro de la enorme región del Universo que pueden alcanzar, notan que ninguna cualidad depende significativamente de la dirección en la que se mira. A esa propiedad del universo observable se la conoce como ‘isotropía’.

Por otro lado, la propiedad llamada ‘homogeneidad’ es un supuesto y se refiere al hecho probable de que la Vía Láctea no se encuentra en un lugar privilegiado del universo visible. Dicho de modo más práctico, si nos hubiera tocado vivir en otra de las miles de galaxias que vemos, nuestros telescopios allí observarían lo mismo que observan desde la Tierra en su posición actual.

³ Por ejemplo, no puede ser el Toro, ya que sabemos que el Toro admite una geometría con $K = 0$. Del mismo modo no puede ser ninguna de las superficies de género mayor a uno, ya que, por lo dicho, esas admiten geometrías de curvatura $K = -1$.

⁴ La región del Universo que se puede “observar” se denomina Universo observable. La manera más usada de “observar” el universo es a través de la radiación electromagnética que en todo su espectro llega a la Tierra desde regiones remotas. Por supuesto, los telescopios ópticos observan “la radiación en el espectro visible”, pero hay otros que lo hacen en regiones que pueden ser muy útiles para ciertos propósitos.

⁵ Todos hemos visto alguna vez, en algún atardecer, partículas de polvo flotar en el aire, iluminadas por los rayos del sol. La manera en que las galaxias se distribuyen en el Universo es, de hecho, bien similar.

Los matemáticos saben que si una región es homogénea e isotrópica, entonces su geometría debe tener curvatura proporcional a exactamente $K = 1$, $K = 0$ o $K = -1$. Actualmente, gran parte de la comunidad científica se inclina (con sólidos argumentos teóricos y experimentales) por la posibilidad de un Universo con curvatura cero.

Pero ¿qué forma con curvatura cero? Al fin y al cabo, el plano y el Toro son dos formas distintas pero que admiten geometrías de curvatura cero.

Para dilucidar el punto, los físicos necesitan de una fuente de radiación que provenga de lugares aún más remotos en el espacio y el tiempo que el Universo visible. Dicha radiación podría contener la información necesaria para aclarar definitivamente la forma del Universo.

Afortunadamente, tal radiación existe y se la conoce como “radiación de fondo” (“*Cosmic Background Radiation*”). Presumiblemente, dicha radiación nos llega desde el origen mismo del Universo y es un residuo de la explosión primordial o, como a los cosmólogos les gusta denominarlo, el *Big Bang*.


Basándose en mediciones de la radiación de fondo, la mayoría de los cosmólogos argumenta (tal vez para desazón de nuestro intrépido Alberto que pudo haber querido algo más original) que, de ser la curvatura $K = 0$, el Universo sería simplemente infinito. Más precisamente, si $K = 0$, se infiere como candidato más probable al análogo tridimensional del plano euclideo.

De ser la curvatura proporcional a $K = -1$, se inclinan por el análogo tridimensional del espacio de Bolyai-Lobachevsky; y de ser proporcional a $K = 1$ (la más improbable de las posibilidades), los cosmólogos prefieren al análogo tridimensional de la esfera (la esfera tridimensional).

Para darnos una idea de cómo puede “haber sido” la historia de nuestro Universo de ser la curvatura $K=1$, imaginemos la geometría de la superficie de un globo que se infla constantemente. Cuando el globo está desinflado nos encontramos en el *Big Bang* y todo el universo se reduce a un punto. A medida que el tiempo transcurre (el globo es inflado), el tamaño del Universo se hace cada vez más y más grande. A menor escala, la geometría de este universo imaginario en un momento dado es la misma que la de una pelota de fútbol que, como dijimos, posee curvatura 1.

Es sabido que en los modelos cosmológicos con $K=1$, el tamaño del Universo no se expande indefinidamente. Según nuestra representación gráfica, el globo alcanzaría su tamaño máximo en algún momento, a partir del cual comenzaría a “desinflarse” y contraerse a un punto que los cosmólogos llaman el *Big Crunch*. Por el contrario, en los modelos cosmológicos con $K=0$ y $K=-1$, el tamaño del Universo se expande indefinidamente.

Finalmente, formas de extensión finita (para cualquiera de los tres casos: $K = -1$, $K = 0$ o $K = 1$) se han estudiado y se siguen estudiando de manera rigurosa en función de las mediciones experimentales sobre la radiación de fondo. La comparación entre las predicciones y las mediciones no ha dado aún un resultado definitivo pero, como dijimos anteriormente, el análogo tridimensional del plano euclideo es, de acuerdo a las plausibles interpretaciones de los datos experimentales disponibles, la posibilidad más favorecida en este momento por los expertos.

La historia aún se está escribiendo. 



La fotografía, que posee cerca de 10.000 galaxias, es una toma de las regiones más remotas del Universo. Fue sacada por el telescopio espacial “Hubble” y se conoce como “Hubble Ultra Deep Field”.