



Probabilidad en la escuela

Tres actividades, varios recursos y algunas estrategias

Mercedes Laborde | Maestra. Máster en Educación (ORT). Formadora en el Área de Matemática en PAEPU.
Fabián Luaces Noria | Profesor de Matemática. Formador en el Área de Matemática de PAEPU.

La Probabilidad es una rama de la Matemática y se relaciona en forma estrecha con el campo de la Estadística que es, en cierta medida, su ala aplicada. Surge con el estudio de los juegos de azar y, tal como lo plantea Bressan (2003), uno de los objetivos de la Probabilidad es evaluar las posibilidades de que un suceso se lleve a cabo o no. De esta manera, el cálculo de probabilidades habilita la toma de decisiones disminuyendo parcialmente la incertidumbre, transformándose, si se quiere, en una medida de esta.

En muchas ocasiones nos enfrentamos a situaciones no deterministas, y su análisis posibilita, entonces, el desarrollo de un pensamiento aleatorio donde cuantificar la posible ocurrencia de un determinado suceso se vuelve importante. El desarrollo de un pensamiento que pueda dar medidas probabilísticas ajustadas, aun en situaciones relativamente sencillas,

no es común, no se construye de manera natural. La mayor parte de la Matemática que estudiamos en Educación Primaria y en Educación Secundaria tiene una larga tradición en la Historia de la Humanidad; sin embargo, la Probabilidad tiene su formulación, como cuerpo de conocimientos ordenados, a principios del siglo pasado. No ha resultado sencillo “domesticar” el azar. Con más razón, para entender su funcionamiento es necesaria la inclusión sistemática, y con clara intencionalidad didáctica, de situaciones que pongan en juego el azar.

El inicio de la Probabilidad es posible fijarlo en el siglo XVII con las figuras de Pierre de Fermat y Blaise Pascal, quienes abordaron la resolución de problemas vinculados con juegos de azar. Otro pionero fue Pierre Simon Laplace, autor de una teoría analítica acerca de la probabilidad.



Pierre de Fermat (1601-1665)



Blaise Pascal (1623-1662)



Pierre Simon Laplace (1749-1827)

Veamos algunas curiosidades:

- «**Sumerios y Asirios** utilizaban un hueso extraído del talón de animales como ovejas, ciervos o caballos, denominado **astrágalo** o **talus**, que tallaban para que pudieran caer en cuatro posiciones distintas, por lo que son considerados como los precursores de los dados.
- En el caso de **la civilización egipcia**, algunas pinturas encontradas en las tumbas de los faraones muestran tanto **astrágalos** como **tableros** para el registro de los resultados.
- Por su parte, los juegos con dados se practicaron ininterrumpidamente desde los tiempos del **Imperio Romano hasta el Renacimiento**, aunque no se conocen las reglas con las que jugaban. Uno de estos juegos, denominado “**hazard**”, palabra que en inglés y francés significa riesgo o peligro, fue introducido en Europa con la Tercera Cruzada. Las raíces etimológicas del término provienen de la palabra árabe “**al-azar**”, que significa “**dado**”.»¹

La enseñanza de la Probabilidad en la escuela primaria está planteada en el *Programa de Educación Inicial y Primaria* (ANEP. CEP, 2009). Carmen Batanero, en conferencia plenaria del *Sexto Congreso Uruguayo de Educación Matemática* (Montevideo, 16-18 abril 2016), destaca la importancia de su inclusión curricular temprana, amparada en investigaciones que demuestran que el niño tiene un razonamiento intuitivo que le permite resolver sencillas situaciones de azar.

En el ciclo de Educación Primaria, estas ideas se desarrollan generalmente a partir de la experimentación en juegos, donde ideas sobre la diferenciación entre lo seguro e imposible, posible pero no seguro, habilitan la valoración de experiencias en las que está

presente el azar. De esta manera, el programa escolar vigente plantea el abordaje de estos contenidos probabilísticos desde Inicial Cinco años a Sexto grado a través de un encadenamiento de nociones que explicitemos a continuación.

Inicial Cinco años – Los sucesos en la exploración de situaciones de azar.

Primer grado – Los experimentos aleatorios.

Segundo grado – El espacio muestral. – La diferenciación de sucesos: seguros, posibles e imposibles.

Tercer grado – Los sucesos simples y compuestos. – La representación: diagrama de árbol.

Cuarto grado – La comparación de frecuencias relativas de sucesos simples. La probabilidad de un suceso. – El suceso no probable, poco probable, con alto grado de probabilidad o seguro.

Quinto grado – La formulación y la comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de sucesos aleatorios. – El tratamiento de la información. – La combinatoria. La resolución de problemas de tanteo. – Los sucesos *equiprobables*. La elaboración de tablas de frecuencia.

Sexto grado – La predicción y el cálculo de la probabilidad experimental de sucesos aleatorios.

Por lo tanto, a lo largo de este recorrido, el alumno irá construyendo ideas a través de la exploración de situaciones de azar. Los experimentos aleatorios habilitarán la consolidación de estas nociones constitutivas de la Probabilidad. La presencia de debates en el aula favorecerá la deconstrucción de algunas ideas relacionadas a la “buena o mala suerte”, diferenciando situaciones

¹ Fuente: “Historia de la Probabilidad” en *Estadística para todos*. En línea: http://www.estadisticaparatodos.es/historia/histo_proba.html

deterministas de fenómenos aleatorios, identificando también la diferencia entre experiencias individuales impredecibles y el comportamiento de un número elevado de casos que sí es posible anticipar.

Una gran cantidad de preguntas importantes sobre el azar pueden modelarse con unos pocos materiales como monedas, dados, urnas y bolas, caminos y bifurcaciones. En general, necesitaremos contar “algo” para empezar a responder, pero solo por contar no daremos cuenta de esa “medida” del azar. El “cuántos” será necesario pero no suficiente.

Los siguientes son ejemplos de problemas que los alumnos resuelven por diferentes caminos.

► Problema 1

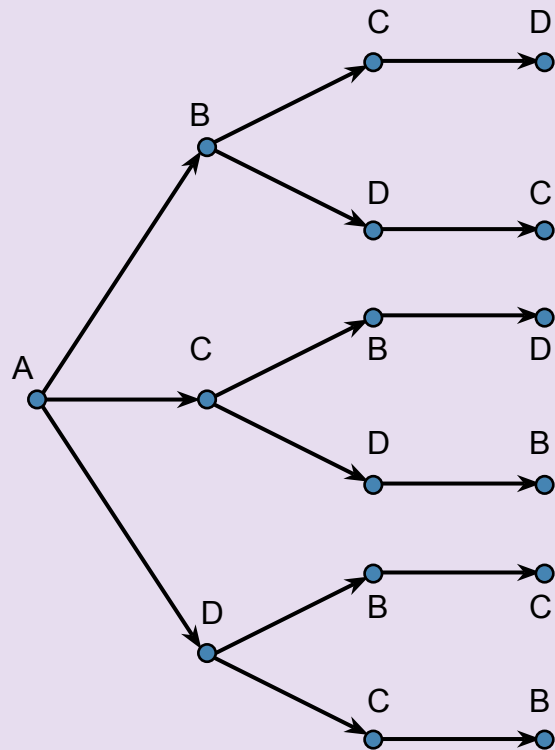
Cuatro amigos quieren sacarse una foto en el banco del parque al que concurren desde niños. Quieren hacerlo uno al lado del otro. ¿De cuántas maneras distintas podrían ordenarse? ¿Es posible que queden ordenados de izquierda a derecha, del menor al mayor teniendo en cuenta la edad? ¿Cuán posible es?

De alguna forma, deberíamos poder contar. Supongamos que sus nombres son **Ana**, **Bernardo**, **Carla** y **Damián** (elegir una buena notación siempre es importante). La pregunta: “¿De cuántas maneras distintas podrían ordenarse?” es equivalente a: ¿de cuántas formas posibles puedo ordenar cuatro letras distintas? O, ¿de cuántas formas posibles puedo colocar cuatro bolas de distintos colores en una caja con cuatro huecos? Es bien importante identificar que tengo cuatro objetos distinguibles entre sí para colocar en un orden determinado. Las siguientes son todas las configuraciones en las que **Ana** queda a la izquierda de la foto:

ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB

Los alumnos intentan escribir todas las configuraciones, y lo hacen. Allí se les presentan problemas habituales del conteo: ¿listé todas las formas posibles? ¿Conté alguna más de una vez? ¿Cómo organizo el conteo para asegurarme de contar todas y de contar bien?

La utilización de diagramas de árbol para representar la situación y organizar el conteo ayuda a obtener la respuesta solicitada. En la figura presentamos una “rama” del árbol, al igual que en la organización anterior, letra a letra.



Y si fueran cinco amigos que quieren sacarse la foto, ¿de cuántas maneras diferentes podrían ordenarse? Este no es un cambio menor en el problema, ya que los ordenamientos son ciento veinte ($5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$), y enumerarlos uno a uno, o elaborar un diagrama de árbol que los incluya a todos, es engorroso. La *regla del producto* es potente en cuanto da respuesta saltándose el recuento uno a uno.

Podemos organizar los problemas para poner juntas las respuestas. ¿Y si fuera un solo amigo? ¿Dos? ¿Tres? ¿Seis?

¿Cuántos amigos en la foto?	¿Cuántos ordenamientos posibles?
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720

El número de configuraciones posibles crece rápidamente, a medida que tenemos más amigos para la foto².

► Problema 2

Marcos tiene una perra como mascota, que está por dar cría. Sabe que serán cuatro. Dice que lo más seguro es que serán dos perritas y dos perritos, ¿estás de acuerdo? ¿Por qué?

Para crear un modelo que dé cuenta de este problema deberíamos asumir que es igualmente probable que al nacer sea macho o hembra. Emparejando con el lanzamiento de una moneda en la que saliera cara con macho y número con hembra, o que saliera un número par en el lanzamiento de un dado con un sexo e impar con el otro, tendríamos una buena manera de modelizar la situación. Representar las diferentes opciones con un diagrama de árbol o enumerar todas las posibilidades, nos permite pasar directamente al conteo para después dar cuenta de la relación de las “que nos sirven” en “el total de posibles”.

Pero, si las estrategias son las mismas que en el problema anterior, ¿es el mismo problema? En este caso, tenemos dos clases de objetos para colocar en cuatro cajones en los que no nos interesa el orden. (Sabemos que esta forma de enunciar la situación, a muchos de nosotros nos recuerda cuando estudiábamos Combinatoria en el liceo). Hacemos un esfuerzo para no atarlo directamente con aquellas fórmulas en las que se condensan importantes estrategias de conteo, ya que el momento para construirlas en la escolaridad es otro.

Para cada uno de los nacimientos tenemos dos opciones y son cuatro nacimientos. ¿Cuántas configuraciones distintas podríamos tener (respetando el orden de nacimiento)? $2 \times 2 \times 2 \times 2$. Dieciséis son todos los casos:

m	m	m	m
m	m	m	h
m	m	h	m
m	m	h	h
m	h	m	m
m	h	m	h
m	h	h	m
m	h	h	h
h	m	m	m
h	m	m	h
h	m	h	m
h	m	h	h
h	h	m	m
h	h	m	h
h	h	h	m
h	h	h	h

² El número de formas distintas de ordenar n objetos distinguibles es el factorial de ese número. Así, el factorial de 4 es 24.

En seis de las dieciséis maneras en las que podrían ocurrir esos cuatro nacimientos hay dos hembras y dos machos. Del mismo modo que si anotáramos todas las opciones posibles de “lanzar una moneda cuatro veces anotando los resultados”, encontraríamos que en seis habría dos *cara* y dos *número*.

En seis de los dieciséis casos, las cosas saldrían como decía Marcos que era más probable. Pero $6/16$, que es $3/8$, es menor que $1/2$ con lo que no es “tan seguro”.

¿Y todos los casos? ¿De cuántas formas?

4 hembras: 1
3 hembras y 1 macho: 4
2 hembras y 2 machos: 6
3 machos y 1 hembra: 4
4 machos: 1

Sus respectivas probabilidades: $1/16$, $4/16$, $6/16$, $4/16$ y $1/16$.

La secuencia 1, 4, 6, 4, 1 parece especial. Respondiendo a preguntas equivalentes para otros casos –¿Qué números obtendríamos para tres nacimientos? ¿Y para dos? ¿Y para cinco?– se puede reinvertir lo hecho para profundizar en la resolución de estas preguntas, ya que el premio viene dado por el *Triángulo de Pascal*³.

							1							
						1		1						
				1		2		1						
		1		3		3		1						
	1		4		6		4		1					
1		5		10		10		5		1				
1	6		15		20		15		6		1			

► Problema 3⁴

El pronóstico del tiempo para el fin de semana dice que la probabilidad de lluvias para el sábado es del 50% y para el domingo también es del 50%. ¿Lloverá el fin de semana? Intercambia con tus compañeros la respuesta que consideras dar. ¿Todos piensan lo mismo?

Al explicitar nuestras ideas acerca de cómo interpretamos esas probabilidades, podemos ponerlas a prueba. Algunos dirán que sí, que lloverá, porque con que llueva uno de los días alcanza, otros dirán que no porque si es igual de probable que pase como que no, etcétera. Una aproximación alternativa a la de los problemas anteriores es ir directamente a una simulación. ¿Con qué materiales podríamos recrear el problema? Las probabilidades asignadas a que llueva el sábado y a que llueva el domingo permiten el modelado de esta situación con el lanzamiento de una moneda dos veces consecutivas. Utilizamos una moneda de un peso para las siguientes series de resultados (*Mulita* significa que efectivamente llovió y *Escudo* es que no llovió).

Diez simulaciones

Sábado	Domingo
M	E
M	M
E	M
M	E
E	M
E	E
M	E
M	M
E	E
M	E

³ «...se denomina Triángulo de Pascal porque fue estudiado por Pascal en 1655. Sin embargo, era conocido mucho antes; se remonta a aproximadamente el año 950 en un comentario sobre un antiguo libro indio llamado el *Chandas Sastra*. También era conocido por los matemáticos persas Al-Karaji y Omar Khayyam, y se conoce como el “triángulo de Khayyam” en el Irán moderno.» (Stewart, 2008)

⁴ Este problema también tiene un enunciado diferente: «...Más tarde, durante la misma velada, estábamos viendo las noticias en TV, y el hombre del tiempo dijo que la probabilidad de que lloviera el sábado era del 50% y también era del 50% la de que lloviera el domingo, de donde concluyó que la probabilidad de que lloviera durante el fin de semana era del 100%» (Paulos, 1990).

Diez simulaciones más

Sábado	Domingo
E	M
M	E
M	E
E	E
E	M
E	M
M	M
E	E
M	E
E	E

Y diez más

Sábado	Domingo
E	M
M	M
M	M
M	E
E	E
E	E
E	M
M	M
M	M
E	M

¿En cuántas simulaciones llovió los dos días (MM)?
 ¿En cuántas uno de los dos días (ME o EM)? ¿En cuántas no llovió ninguno (EE)?

Simulaciones	Llovió los dos días	Llovió un solo día	No llovió el fin de semana
de la 1 a la 10	2	6	2
de la 11 a la 20	1	6	3
de la 21 a la 30	4	4	2
Totales	7	16	7

Parece ser que con ese pronóstico es bastante más probable que llueva el fin de semana (un día o los dos) a que no (ninguno de los dos días). Pero... ¿cuánto más probable? En un grupo de veinte alumnos si cada uno hace el experimento diez veces tenemos doscientos fines de semana de prueba. Hicimos nuestro experimento con la moneda de un peso (sí, sin comentarios).

Simulaciones	Llovió los dos días	Llovió un solo día	No llovió el fin de semana
de la 1 a la 200	51	104	45

Para interpretar mejor estos números podemos pasar a expresar la frecuencia relativa en la que ocurrió cada uno de los fenómenos.

Llovió el fin de semana: 155/200. No llovió en el fin de semana: 45/200.

En porcentajes serían: 77,5% y 22,5%. ¿Es tres veces más probable que llueva a que no?

Para cerrar el análisis es deseable volver a la estrategia de analizar todos los casos.

MM, ME, EM, EE. Todos ellos igualmente probables. Tres de los cuatro determinan lluvia el fin de semana y solo uno de los cuatro que no la habrá. Asignaríamos así $3/4$ y $1/4$ como probabilidad en ambos casos. ¿Difiere tanto de los resultados que obtuvimos en el conjunto de simulaciones?⁵ Es una discusión interesante a desarrollar con nuestros alumnos, en la que esta actividad de simulación sería una de muchas.

⁵ La Ley de los Grandes Números, que explica esta adecuación, puede parafrasearse de la siguiente manera: la diferencia entre la probabilidad de un suceso y la frecuencia relativa en la que ocurre tiende a 0. Si el número de experimentos es "grande" la media de los resultados se acerca a la probabilidad.



A lo largo de este recorrido hemos intentado enfrentar a los alumnos a distintos tipos de problemas en los que la probabilidad está presente. Abordar temáticas provenientes del contexto social –resultados deportivos, posibilidades de lluvia, juegos– permite transitar por la existencia de situaciones en las que no es posible determinar un resultado específico.

El manejo de variables didácticas por parte del maestro es fundamental: material que puede tener el alumno, realización empírica de la experiencia, número de elementos que se vinculan, número de veces en que se repite “el experimento”, organización de la

clase, entre otras. ¿Hasta cuándo sostener la presencia de materiales? ¿Qué tipo de consignas presentar para que “obliguen” a buscar otras formas de obtener las respuestas?

También será interesante poner en debate la relación entre el número de veces en que aparece un suceso y el número de veces que se ha realizado el experimento. ¿Existe un vínculo entre ambos números? ¿Cuál?

El registro de datos tal como lo planteamos anteriormente, surgido de la necesidad de organizar la información, es también otro componente de esta temática. 

Referencias bibliográficas

- ANEP. CEP. República Oriental del Uruguay (2009): *Programa de Educación Inicial y Primaria. Año 2008*. En línea (Tercera edición, año 2013): http://www.cep.edu.uy/archivos/programescolar/ProgramaEscolar_14-6.pdf
- BATANERO, Carmen (2016): “Posibilidades y retos de la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria” en *Actas del 6º Congreso Uruguayo de Educación Matemática*, pp. 24-31. En línea: <http://semur.edu.uy/curem6/actas/pdf/48.pdf>
- BATANERO BERNABEU, Carmen; SERRANO ROMERO, Luis (1995): “Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas” en *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, N° 5, pp. 15-28. En línea: <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/aleatoriedad.pdf>
- BRESSAN, Ana María; REYNA, Ignacio; ZORZOLI, Gustavo (2003): *Geometría escolar. Actividades para grupos escolares de 6 a 12 años*. Montevideo: Ed. Rosgal.
- DÍAZ GODINO, Juan; BATANERO, María del Carmen; CAÑIZARES, María Jesús (1987): *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Ed. Síntesis.
- GARFUNKEL, Solomon (dir.) (1999): *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid: Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid.
- PAULOS, John Allen (1990): *El hombre anumérico. El analfabetismo matemático y sus consecuencias*. Barcelona: Tusquets Editores.
- STEWART, Ian (2008): *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años*. Barcelona: Ed. Crítica.