

¿Dónde está el centro?

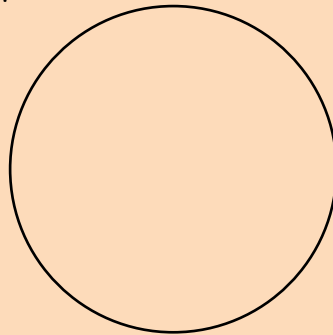
Alejandro Duarte Furiati | Matías Guichón Díaz | Profesores de Matemática. Docentes en Formación de Profesores (CFE) y Formadores del Equipo de Matemática del CEIP/IFS.

Introducción

Este artículo recoge reflexiones que surgen tanto del análisis previo de una actividad de copiado de figuras, como de los procedimientos de resolución desarrollados por algunos alumnos. Parte de estas ideas tienen su origen en la preparación de un taller para Formadores de Matemática¹ del Instituto de Formación en Servicio del CEIP. Agradecemos a los maestros María Ana Ipar (Escuela N° 78, Salto), María Eugenia Ferreri (Escuela N° 116, Florida), Rosario Ortega (Escuela N° 144, Tacuarembó), Juan Castro (Escuela N° 5, 25 de Mayo, Florida), Eloísa Tambasco y Florencia Espinosa (Escuela N° 204, Canelones) por proponerles amablemente la actividad a sus alumnos y permitirnos analizar sus procedimientos.

A continuación presentamos la actividad de copiado que mencionamos, y las reflexiones que generó.

Copíá esta circunferencia y anotá cómo lo hiciste.



Condiciones de realización (para el maestro)
La figura se da en una hoja lisa. La copia la deben hacer en otra hoja lisa, no transparente, y los instrumentos disponibles son un compás, una regla graduada y una escuadra.

1) Análisis de la actividad

Analicemos algunas decisiones didácticas que hemos tomado en el diseño de esta actividad y son: el *tipo de actividad* (de copia), la *figura* elegida (circunferencia), el *tipo de hoja* (hoja lisa tanto para la figura original como para copiarla), la *consigna* y los *instrumentos* permitidos para hacer la copia (compás, regla graduada y escuadra).

¹ Sexto Encuentro de Formadores de Matemática del CEIP/IFS (10 de agosto de 2015).

Tipo de actividad

Esta es una actividad de copiado y, como tal, requiere que los alumnos se enfrenten al análisis de las propiedades de las figuras. Copiar la figura exige a los alumnos «*tener en cuenta sus elementos, sus medidas, identificar ciertas relaciones y propiedades, así como seleccionar los instrumentos más apropiados*» (Itzcovich, 2007:195), interrogar la figura para rescatar aquello que permite reproducirla y descartar sus características innecesarias para la tarea. De esta forma, algunas características de la circunferencia dejarán de estar ocultas a los ojos de los alumnos. En este caso, los alumnos deberán establecer relaciones entre el centro de la circunferencia y sus diámetros, sus cuerdas y tal vez otros elementos.

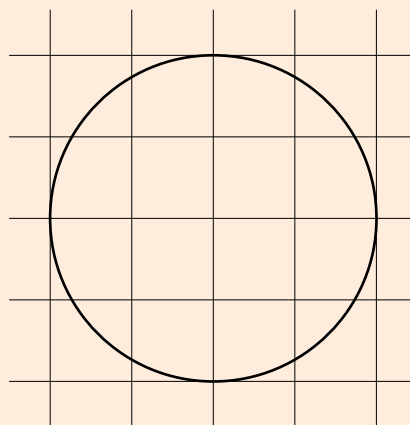
Es importante destacar que en esta actividad no se pretende enseñar a copiar una circunferencia, por lo que el copiado no es un fin en sí mismo. Por el contrario, el copiado en este caso es un medio para identificar y discutir algunas propiedades del centro y los diámetros de la circunferencia.

Figura

Con esta actividad nos interesa discutir algunas propiedades de la circunferencia, trabajando directamente con la figura involucrada. Decidimos que se presentaría sin el centro, porque buscamos que los alumnos pongan en juego sus ideas acerca del centro de la figura y luego discutir estas ideas. Si la figura propuesta tuviera representado su centro, la actividad se reduciría al “transporte de la circunferencia” utilizando el compás. **Copiar la figura que hemos presentado, obliga a los alumnos a hallar el centro de la figura original.** Dicha figura permite a los estudiantes realizar ensayos y errores, realizar correcciones sobre la marcha, que no serían posibles si la figura no estuviera a la vista. La presencia de la figura también permite que los alumnos validen por sí mismos su procedimiento, superponiendo las figuras (la original y la obtenida por copiado) a trasluz.

Tipo de hoja

La hoja lisa obliga a los alumnos a tomar medidas, a establecer los elementos de referencia (como cuerdas, diámetros, puntos de la circunferencia, etc.) para medir y, por tanto, establecer relaciones entre dichos elementos. Que la hoja donde copian la figura sea lisa implica que los alumnos transporten segmentos, midan, usen instrumentos para trazar perpendiculares, etcétera. Si la figura original fuera presentada en una hoja cuadriculada (como se muestra en la siguiente figura) bastaría con contar cuadraditos para tomar medidas y encontrar el centro de la circunferencia.



Si la hoja donde se copia la figura fuera también cuadriculada, no sería necesario utilizar escuadra para trazar perpendiculares, ni medir para transportar segmentos. Es por ello que el papel cuadriculado permitiría copiar la figura sin la necesidad de establecer relaciones entre los diámetros y el centro de la circunferencia.

La hoja opaca bloquea “el calcado” como procedimiento de resolución. Si la hoja permite calcar, los alumnos pueden copiarla sin atender a sus propiedades geométricas. Es decir que si la hoja fuera transparente, los alumnos podrían hacer la copia independientemente de los conocimientos geométricos que posean y de la figura que deban copiar.

La consigna

La inclusión de la palabra “circunferencia” en la consigna de la actividad es intencional, y podemos mencionar dos argumentos para ello.

Queremos que los alumnos se acostumbren a no identificar perceptivamente, “a ojo”, en este caso la circunferencia, sino por



las propiedades. Si la consigna no dijera que es una circunferencia, nadie estaría habilitado a decir que lo es solo por mirarla.

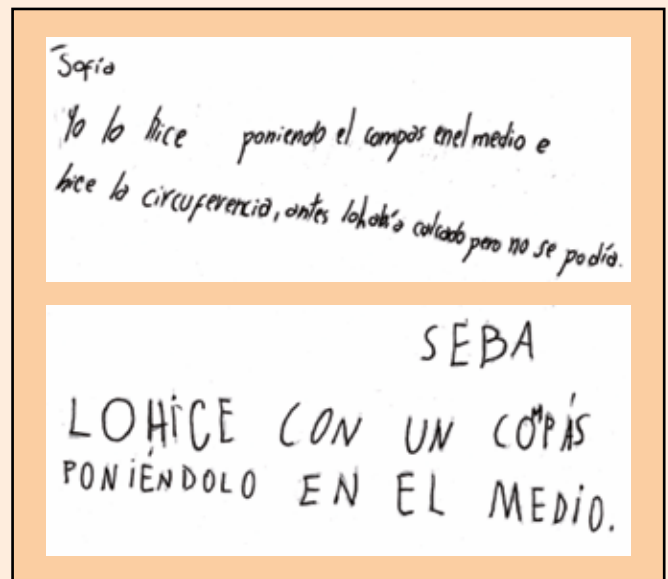
También la certeza de que es esa figura y no otra, permite que los alumnos evoquen lo que saben de circunferencias y lo pongan en juego para realizar la copia. Así, un alumno al leer podría evocar cuestiones como “hay que usar el compás”, “le falta el centro”, “tengo que medir el radio”, y otras que le permitirán desarrollar procedimientos.

Instrumentos

Los instrumentos habilitados para realizar la copia están relacionados con el tipo de hoja. En este caso que la hoja es lisa y los alumnos deben tomar medidas, se ha habilitado el uso de la regla graduada. La escuadra está permitida para aquellos alumnos que necesiten trazar tanto rectas paralelas como rectas perpendiculares o ángulos rectos. Esto podría ser necesario para alumnos que pongan en juego conocimientos sobre el lugar de Thales o procedimientos relacionados con cuadriláteros. El compás permite a los alumnos tanto transportar segmentos como trazar finalmente la circunferencia. La escuadra permite poner en juego relaciones entre ángulos rectos y la circunferencia o, más precisamente, entre ángulos rectos y diámetros de la circunferencia, es decir, el conocido lugar geométrico de Thales, que los niños no conocen formalmente pero sí como “conocimiento en acto” (disponen del mismo).

2) Análisis de procedimientos

Analicemos ahora algunos de los procedimientos de los alumnos.



Sofía y Seba (cuarto grado) saben que la circunferencia se traza usando el compás. Saben también que para usar el compás necesitan “apoyar” el compás “en el medio”, o sea que reconocen la existencia del centro de la circunferencia aunque no esté representado. El centro de la circunferencia lo hallan probando, apoyando el compás hasta que les quede. Estos alumnos ejecutan un procedimiento que ya conocen: el trazado de una circunferencia. Sin embargo no explican por qué hacen esto, es decir que no explicitan ninguna propiedad del centro de la circunferencia, lo que no implica que no las conozcan.

Lucía

Me fije en el centro de la circunferencia con un compás. Luego al compás le quedo la misma medida luego puse el compás en la hoja y lo jire. Encontre el centro con el compás fui habriendo el compás lo fui jirando y quedo la medida.

JOSEFINA

Lo hice con un compás y tomé medidas de el medio hasta el contorno.

Lucía (cuarto grado) y Josefina (quinto grado) también hallan el centro de la circunferencia, probando al igual que lo hicieron Sofía y Seba; sin embargo, ellas mencionan un elemento al que ellos no se refirieron: “la medida”. Lucía dice que “al compás le quedó la misma medida”, lo que nos hace pensar que reconoce que hay una medida que debe encontrar. Josefina que también fue probando, agrega algo sobre esa medida que está buscando, dice “tomé la medida del medio hasta el contorno”. Esta frase de Sofía nos hace pensar que ha identificado que para reproducir una circunferencia debe conocer la distancia del centro a los puntos de la circunferencia, es decir, el radio. En ambos casos hablan de medir con el compás, cuando en realidad lo utilizan para transportar una distancia y ninguna de las dos efectivamente mide.

Santiago (cuarto grado) dice lo siguiente:

Yo Medí el centro y Después con la Medida en el Compás lo hice

Santiago, que también menciona la medida cuando explica lo que hizo, dice que “con la medida en el compás lo hice”. Pero la expresión “con la medida en el compás” pone en evidencia que Santiago está utilizando el compás como un transportador de medidas. Si bien Santiago usa el compás de igual forma que Lucía y Josefina, es consciente de que este instrumento le sirve para transportar medidas, que le permite “llevar medidas” de una figura a otra, y lo deja escrito.

Martín

Yo agarre la regla y medi la primera circunferencia y media 5cm des pues opoje el compás en 2,5 que es la mitad y gire el compás y lo medi y media cinco

Florelena

Yo busque la mitad de la circunferencia y lo medi con la escuadra entonces me quedo 5cm y le busque la mitad y me dio 2 y medio lo medí con el compás y hice el círculo en esta hoja.

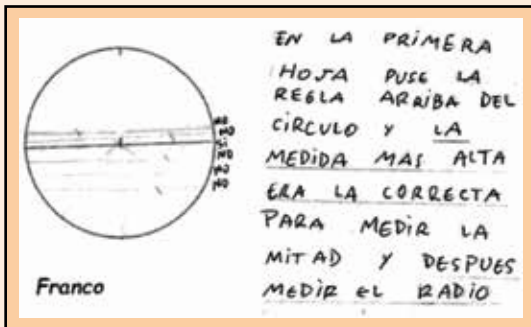
Anaclara

YO MEDÍ EL DIÁMETRO Y ME DIO 5 CM LUEGO EL RADIO SERÍA 2,5 TUJE EL COMPÁS ARRIBA DE LA REGLA, LO ABRI HASTA QUE LLEGARA A DOS COMA CINCO 2,5 PUSE EL COMPÁS EN EL CENTRO Y LA TRAZE A LA CIRCUNFERENCIA.

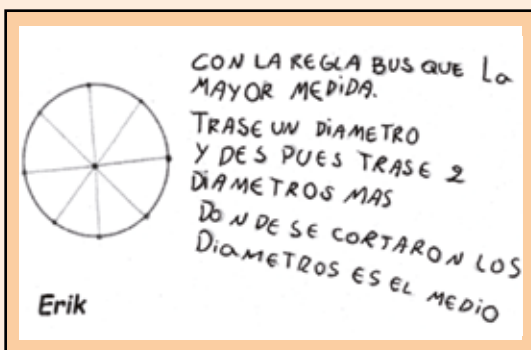
Martín (cuarto grado), Florelena y Anaclara (quinto grado) también miden. En este caso, los tres tantean diámetros, y miden este segmento. Los tres utilizan reglas graduadas, dicen que el diámetro mide 5 cm y luego dividen la medida para obtener la medida del radio. Estos alumnos, al igual que los anteriores, reconocen la existencia del centro de la circunferencia y una distancia fija que deben encontrar. Saben además que el centro es el punto medio de los diámetros, pero para encontrarlo recurren a la medida: estos tres alumnos no dividen el segmento geoméricamente (por ejemplo, trazando el punto medio con regla y compás), sino que lo hacen combinando aritmética y mediciones. Aritmética cuando dividen 5 cm entre 2, y mediciones cuando “miden 2,5 cm”.

Es interesante observar la diferencia entre lo que dicen estos alumnos: mientras que Martín habla de “medir la circunferencia” para hacer referencia al diámetro, Florelena le llama “la mitad de la circunferencia” y Anaclara se refiere al diámetro.

Por último analicemos los procedimientos de Franco (quinto grado), Erik y Rafa (sexto grado).



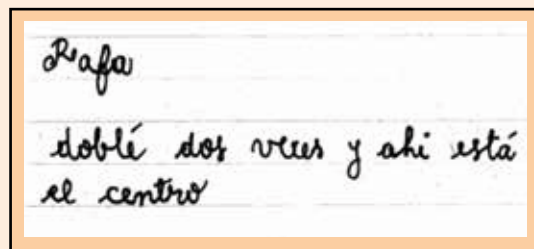
Franco dibuja varias cuerdas que va midiendo, hasta obtener la mayor. Esto se observa cuando dice “la medida más alta era la correcta”. En el dibujo puede observarse como Franco lleva un control de los segmentos que “no le servían” y del que él estaba buscando. Este segmento “más largo” o cuerda de mayor medida es el diámetro, que Franco no explicita. En lo que escribe este alumno se hace evidente que conoce la relación entre el diámetro y el radio: menciona “para medir la mitad y después medir el radio”. Esto nos muestra que para Franco, el centro de la circunferencia es el punto medio (o está en la mitad) de los diámetros de la misma.



Erik también tatea con la regla para trazar diámetros y dice “busqué la mayor medida”. Esto nos muestra que Erik, al igual que Franco, reconoce el diámetro de la circunferencia como la mayor cuerda. A diferencia de Franco, Erik no deja rastros de la búsqueda sino que “a ojo” traza la que ve más grande. A diferencia de Franco, Erik no busca el punto medio del diámetro que trazó, sino que traza dos diámetros más y dice “donde se cortaron los diámetros es el medio”.

Esto pone de manifiesto que para Erik, el centro es “el punto de corte de los diámetros”, lo que no quiere decir que Erik no conozca también que el centro sea punto medio de los diámetros, sino que pone en juego esa otra idea de centro en su procedimiento.

Es importante notar que, si bien los procedimientos de Franco y Erik tienen cierto grado de error, ya que para hallar los diámetros tantean con una regla graduada, este “tanteo” es producto de cierto conocimiento. Para que estos alumnos pongan en juego procedimientos que no impliquen tantear (y no decimos sin error, ya que toda medición efectiva implica errores), se hace necesario trabajar sobre diámetros y centros para darles la oportunidad de revisar (o ampliar) sus conceptualizaciones sobre estos elementos de la circunferencia.



Por último, Rafa encuentra el centro de la circunferencia, plegando. Rafa “dobla” dos veces (y aunque no lo diga, lo hace por la mitad) la hoja que tiene la circunferencia original, y halla el centro en donde se cortan los dobleces. Como podemos notar, “los dobleces” que obtiene Rafa son diámetros de la circunferencia (más precisamente, rectas que contienen diámetros), y por la forma de plegado son además ejes de simetría de la circunferencia (ya que al plegar se superponen las mitades de circunferencia). Es por esto que podemos pensar que Rafa pone en juego la idea de diámetro como eje de simetría de la circunferencia (o más precisamente, “los ejes de simetría contienen diámetros”), aunque no sea consciente de ello. Que Rafa encuentre el centro en el punto de corte de los dobleces, nos hace pensar en el centro de la circunferencia como punto de intersección de diámetros. En este último paso, los procedimientos de Rafa y Erik tienen un punto en común y, por lo tanto, estos alumnos ponen en juego un conocimiento que comparten.

3) Otros procedimientos posibles

Del análisis de los procedimientos de Franco, Erik y Rafa se desprende una característica común. En los tres casos, los alumnos hallan en primer lugar un diámetro de la circunferencia, y en segundo lugar encuentran el centro de la misma. Pero ¿por qué los procedimientos parecen tan diferentes si todos ellos comparten esta característica? La diferencia radica en distintas nociones sobre el diámetro y el centro de la circunferencia, que ponen en juego estos alumnos, es decir que estas ideas condicionan el procedimiento que desplieguen para encontrar el centro de la circunferencia. Analicemos esto con mayor detalle.

	Lo que dicen	Conocimiento sobre diámetro	Conocimiento sobre centro
Franco	<i>"En la primera hoja puse la regla arriba del círculo y la medida más alta era la correcta. Para medir la mitad y después medir el radio."</i>	Es la mayor cuerda ² , el segmento más largo que une dos puntos de la circunferencia.	Es el punto medio del diámetro.
Erik	<i>"Con la regla busqué la mayor medida. Tracé un diámetro y después tracé dos diámetros más. Donde se cortaron los diámetros es el medio."</i>	Es la mayor cuerda, el segmento más largo que une dos puntos de la circunferencia.	Punto de corte de diámetros.
Rafa	<i>"Doblé dos veces y ahí está el centro."</i>	Es eje de simetría de la circunferencia.	Punto de corte de diámetros.

Como se puede observar en la tabla, cada pareja de ideas "diámetro-centro" puesta en juego, da lugar a un procedimiento. Podríamos entonces listar distintas ideas acerca de los diámetros y del centro de una circunferencia con el objetivo de obtener **otros caminos** para hallar el centro de la circunferencia.

Diámetro

- ▶ (D1) Es la mayor cuerda.
- ▶ (D2) Los ejes de simetría de la circunferencia contienen diámetros.
- ▶ (D3) La recta perpendicular a una tangente por el punto de tangencia, contiene un diámetro.
- ▶ (D4) La mediatriz de una cuerda cualquiera contiene un diámetro (o pasa por el centro).

Centro³

- ▶ (C1) El punto medio de los diámetros.
- ▶ (C2) Es el punto de corte de dos o más diámetros.

Como dijimos antes, cada "par" de conceptos sobre diámetro y centro da origen a un procedimiento. Para organizar los posibles procedimientos podemos hacerlo en una tabla de doble entrada en la que dispondremos de "ideas sobre el diámetro" en las filas e "ideas sobre el centro" en las columnas.

En los casilleros describimos los procedimientos que tienen lugar a partir de cada "par" de conceptos.

² En un abuso de lenguaje hablamos del diámetro como "la mayor cuerda", dando idea de que es único. Es importante recordar que una circunferencia tiene infinitos diámetros; todos ellos de la misma medida (esta sí es única).

³ Son nociones de centro de la circunferencia asociadas al diámetro. Permiten hallar el centro, una vez que se conoce un diámetro.

		Centro	
		C1	C2
Diámetro	D1	Con la regla busca la mayor medida. Traza un diámetro, mide la mitad y ubica el centro.	Con la regla busca la mayor medida. Traza un diámetro y después traza otro diámetro. Donde se cortan los diámetros es el centro.
	D2	Dobla la circunferencia hasta que se superponen las mitades. El doblar determina un diámetro. Lo mide y con la mitad de la medida encuentra el centro.	Dobla la circunferencia hasta que se superponen las mitades. El doblar determina un diámetro. Realiza lo mismo, plegando de nuevo. Donde se cortan los diámetros es el centro.
	D3	Traza una tangente a la circunferencia. Con la escuadra traza la perpendicular y determina un diámetro. Lo mide y con la mitad de la medida encuentra el centro.	Traza una tangente a la circunferencia. Con la escuadra traza la perpendicular y determina un diámetro. Repite el procedimiento y halla otro diámetro. Donde se cortan los diámetros es el centro.
	D4	Traza una cuerda y de ella la mediatriz. La mediatriz determina un diámetro, y el punto medio indica el centro.	Traza una cuerda y de ella la mediatriz. La mediatriz determina un diámetro. Repite el procedimiento y halla otro diámetro. Donde se cortan los diámetros es el centro.

4) Algunas reflexiones sobre los procedimientos

Para el análisis anterior tomamos todos los procedimientos que surgieron en los distintos grupos donde se aplicó la actividad, sin tener en cuenta la frecuencia con que estos se dieron. A modo de ejemplo, los que utilizan la noción de diámetro asociado a un eje de simetría (plegando) aparecen pocas veces, y con menor frecuencia aún los que utilizan dos plegados para determinar el centro como corte de dos diámetros. Por lo general, este camino, el de analizar todos los procedimientos que aparecen en una clase, no es el deseable a seguir al momento de realizar una puesta en común. Sí tener conocimiento de todos los que surgieron en el grupo, pero realizando la selección de algunos en función de lo que se pretenda trabajar con la actividad. Asumiendo que alguno de estos procedimientos no son representativos de la muestra, nosotros los tomamos tratando de abarcar la mayor cantidad (incluso agregamos algunos), con el fin de enriquecer la discusión y abordar por varios caminos las relaciones entre diámetro y radio.

También nos parece importante mencionar que el énfasis en el análisis de los procedimientos estuvo puesto en los conocimientos que desplegaron los alumnos al momento de resolver lo que se les pedía en la consigna, y no en la rigurosidad de los trazados ni en la profundidad de los relatos sobre cómo lo hicieron. Sí compartimos que es deseable realizar un trabajo en pos de mejorar las argumentaciones, tanto

incorporando actividades de representación (trazados) que exijan un avance en este sentido, como adoptando como “regla” que la descripción y la argumentación formen parte de este tipo de actividades.

5) Y después de copiar la figura, ¿qué hacer?

Como mencionamos antes, el copiado de la circunferencia podría exigirles a los alumnos que pongan en juego ciertas ideas y relaciones respecto del diámetro y el centro de la circunferencia, pero la copia deja las propiedades en forma implícita. Es decir, que los alumnos copien la circunferencia no implica que estos sean conscientes de las propiedades que ponen en juego, ni de las condiciones en que son válidas las mismas. Para ello es necesario que, en primer lugar, puedan explicitar *lo que miran* cuando realizan la copia. La *explicitación* de las características o de las propiedades por parte de los alumnos es importante, porque permite discutir las, generalizarlas en caso de que sea posible, o *ajustar* las condiciones en las que funcionan algunas propiedades. Esto implica que el docente deberá planificar instancias para discutir y profundizar propiedades de los diámetros y el centro de la circunferencia, y la relación entre ellos. Al efecto se pueden poner a discusión los procedimientos de algunos alumnos para “desentrañar” aquello que han tenido en cuenta al realizar la copia. Preguntas como las siguientes pueden ayudar en esta tarea.

- ▶ Franco, para encontrar el diámetro, halló la medida más grande, ¿qué creen los demás? ¿Me pueden mostrar en un dibujo qué significa que el diámetro es la mayor medida? ¿Cómo podríamos escribir eso? Si le tuviéramos que contar a un alumno de la otra clase lo que es el diámetro de una circunferencia, ¿qué le podríamos decir?
- ▶ Erik trazó varios diámetros y donde se cortan marcó el centro, ¿están de acuerdo? Si trazo muchos diámetros, ¿es seguro que se cortan? ¿Cuántos diámetros son necesarios para poder ubicar el centro? Entonces, ¿qué sabemos del centro y de los diámetros?
- ▶ Rafa dobló la circunferencia, ¿qué encontró cuando hizo esos dobleces? ¿Se puede plegar de cualquier forma? ¿De qué forma hay que plegar para encontrar un diámetro? ¿Qué les parece si anotamos eso para los que no vinieron?

Preguntas como las anteriores podrían llevar a la clase a discutir y a registrar algunas propiedades del centro de la circunferencia, de los diámetros o relaciones entre estos. Esta discusión también podría incluir la confrontación entre los procedimientos, es decir, la discusión de similitudes, diferencias, elementos comunes, o elementos de uno de ellos en el otro. Una vez que los alumnos hayan entendido qué hicieron Franco, Erik y Rafa, podrían hacerse preguntas como las que siguen para confrontar sus procedimientos.

- ▶ Franco marcó el centro en el punto medio del diámetro, y Erik no hizo lo mismo, ¿dónde está el punto medio de los diámetros de Erik? ¿Los diámetros de Erik se cortarían en un punto que no sea el medio?
- ▶ Erik trazó varios diámetros y Rafa plegó, ¿se parece en algo lo que hicieron? ¿Dónde están los diámetros de Erik en lo que hizo Rafa?

Como decíamos antes, estas discusiones son para que los alumnos y el docente analicen las propiedades puestas en juego en la copia, y que podrían ser equivocadas o incompletas.

«...avanzar en el conocimiento supone no sólo elaborar nuevas propiedades sino también rechazar aquellas que no corresponden al objeto con el que se está trabajando. Este rechazo sólo es posible si las concepciones –erróneas, o parciales, o restringidas– se manifiestan a través de alguna actividad. De otra manera ¿cómo podría el docente discutir esta cuestión con los alumnos?» (Sadovsky et al., 1998:16)

Y como antes dijimos que la copia por sí misma no implica que estas propiedades se expliciten, la discusión colectiva es una buena oportunidad para reformular estas cuestiones.

Durante estas discusiones podrían plantearse nuevos problemas. Uno de ellos podría ser “diseñar nuevos caminos para realizar la copia” a partir de lo que elaboraron otros compañeros. Es decir, en la clase se pueden discutir otros procedimientos de forma similar a lo que discutimos en la parte 3 de este artículo. Preguntas como las siguientes podrían ayudarles a los alumnos a reinvertir propiedades discutidas.

- ▶ Dani dice que si plegamos la circunferencia a la mitad obtenemos un diámetro, pero no sabe encontrar el centro, ¿cómo podemos ayudarlo a encontrarlo?
- ▶ Martina dice que si le ayudamos a encontrar un diámetro, ella puede encontrar el centro plegando ese diámetro por la mitad. ¿Cómo le podemos ayudar? ¿Vamos a anotar todos los pasos de la copia?
- ▶ Si Dani y Martina copian juntos la circunferencia, ¿cómo creen que lo harían?
- ▶ Con lo que hicieron Franco y Martín, ¿pueden inventar otra forma de copiar la circunferencia?
- ▶ Anotá todo lo que sabés de los diámetros y después inventá formas de hallarlos (algo similar puede formularse para el centro). ¿Se les ocurren otras formas de copiar la circunferencia?

6) Otras actividades

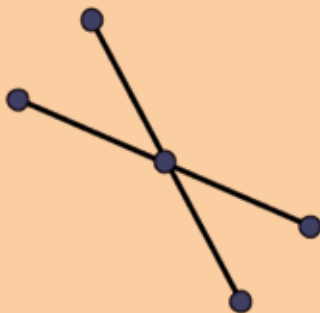
Ahora analicemos varias actividades que podrían promover el surgimiento de algunas propiedades del diámetro y del centro de la circunferencia, o reinvertir estas propiedades en caso de que ya hayan surgido en la clase.

El segmento de la figura es el diámetro de una circunferencia, ¿podés dibujarla?



Esta actividad permite poner en juego la relación entre el centro de la circunferencia y cualquiera de sus diámetros. En este caso, los alumnos deberán tener en cuenta que el centro es el punto medio del segmento y, por tanto, hallar el punto medio del segmento representado. Los procedimientos desplegados por los alumnos y los conocimientos que pongan en juego para encontrar el centro de la circunferencia dependerán de los instrumentos habilitados por el docente: habilitar la regla graduada permite medir; no habilitar ningún instrumento podría obligar a los alumnos a plegar. La relación “los diámetros se cortan en el centro” no es útil para resolver esta actividad, pero sí para la siguiente.

En la figura están representados dos diámetros de una circunferencia. Dibujala usando solo el compás.

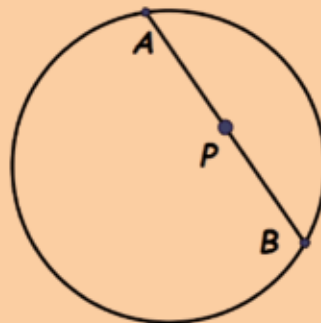


La restricción de usar solo el compás bloquea la medición, es decir, los alumnos no podrán hallar el punto medio de los diámetros para

resolver la actividad. Para resolverla, los alumnos deberán tener en cuenta que “los diámetros de una circunferencia se cortan en el centro”, e identificar el centro de la circunferencia en la representación que se les brinda.

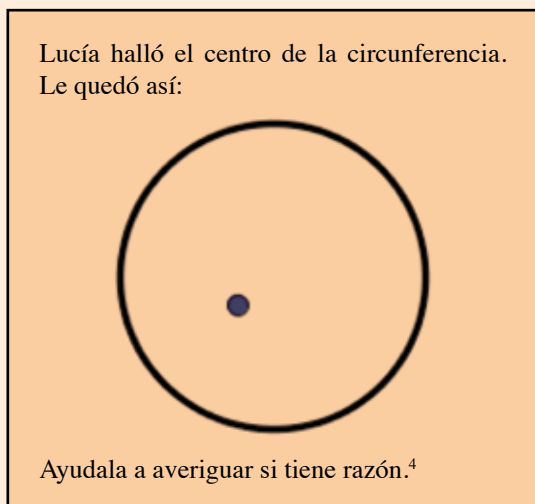
Las siguientes actividades no requieren que los alumnos realicen representaciones, sino que ya están dadas. Estas implican que los alumnos validen soluciones ya realizadas por otros alumnos, es decir, buscar razones a favor o en contra de lo que ya está hecho.

La maestra le pregunta a Santi si el punto P es el centro de la circunferencia.



El responde: “como está en el medio de AB, entonces es un diámetro”. ¿Estás de acuerdo?

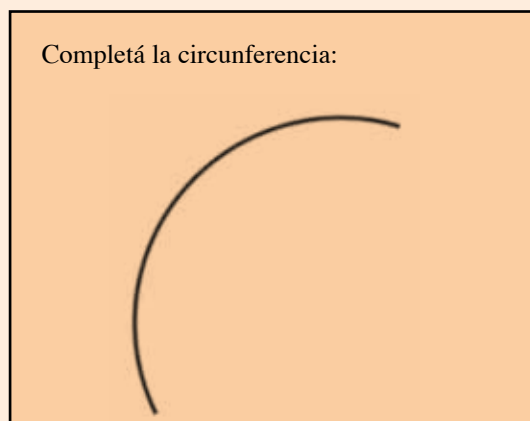
El punto P que Santi ubicó como el centro de la circunferencia, no es tal. Esto puede “verse”, o sea que “a ojo” podemos decidir que Santi no tiene razón. La inclusión de una explicación en la actividad tiene por objetivo cuestionar los argumentos que ponen en juego los alumnos para verificar que un punto es centro de una circunferencia. Esta actividad permite discutir que “P debe ser punto medio de todas las cuerdas que lo contienen”, ya que todas estas son diámetros. Como esto no sucede, entonces P no es el centro de la circunferencia. La actividad podría modificarse para generar una actividad más abierta como sigue.



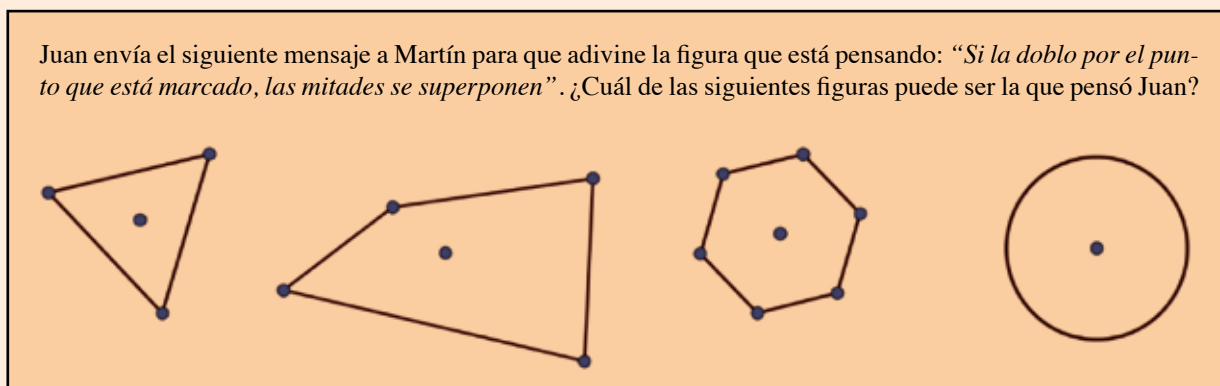
De manera similar a la anterior, se puede ver a simple vista que el punto que ubicó Lucía no es el centro de la circunferencia, lo que podría animar a los alumnos a dar una respuesta rápida: “Lucía no tiene razón”. Pero como la actividad lo requiere, deberán buscar razones para convencer a Lucía de que no tiene razón. Dependiendo de los instrumentos que habilite el docente, los alumnos podrían usar el compás, medir radios con regla graduada y verificar que son diferentes, plegar, o resolver de otras formas. Las respuestas que den los alumnos podrían generar actividades como la anterior, en las que el objetivo es cuestionar los argumentos utilizados por los alumnos.

La siguiente actividad tampoco exige a los alumnos representar una figura, pero sí “probar” y discutir en qué casos funcionan algunos criterios y propiedades.

Como puede notarse, el mensaje de Martín permite elegir más de una figura. Esto se debe a que tanto el triángulo equilátero como el hexágono regular tienen ejes de simetría que pasan por sus centros, al igual que la circunferencia. Lo que diferencia las figuras es que en el caso de los polígonos “algunas rectas” por el punto marcado son ejes, mientras que en el caso de la circunferencia “cualquier recta por el centro es eje de simetría”. Esta apertura en la solución permite discutir con los alumnos que “todas las rectas por el centro son ejes de simetría de la circunferencia”, o “las rectas que contienen diámetros son ejes”. La última actividad que presentamos exige a los alumnos realizar un dibujo y reinvertir los conocimientos anteriores sobre el diámetro.



En este caso, la figura representada es un arco menor a una semicircunferencia, lo que bloquea el procedimiento “hallar la mayor cuerda”, o cualquier otro procedimiento que implique hallar un diámetro. Es por ello que podrían




⁴ Actividad tomada y modificada del curso Apoyo a la Calidad del Egreso Escolar – PAEPU (Jornada 4 - Supervisores 2014).

ponerse en juego propiedades de las rectas que contienen a los diámetros, por ejemplo, “todos los ejes de simetría de la circunferencia contienen diámetros”. De esta forma se obtiene que “los ejes de simetría de la circunferencia se cortan en el centro”. A partir de esto, la actividad puede resolverse por plegado igual que resolvió Rafa la actividad del comienzo de este artículo: “plegando dos veces, y en el punto donde se cortan los dobleces está el centro de la circunferencia”.

7) Para terminar

En primer lugar nos parece importante destacar el valor que tienen las actividades de copiado de figuras en la enseñanza de la Geometría en el nivel primario. Como ya lo mencionamos antes, el copiado de figuras exige que los alumnos cuestionen las figuras, decidan qué deben tener en cuenta de las mismas y los instrumentos a utilizar. En otras palabras, los alumnos deben “aprender a mirar” las figuras con el objetivo de copiarlas. Estas propiedades que los alumnos deben identificar en el copiado son las que el maestro se propone enseñar.



Por otro lado, nos parece importante resaltar la importancia de abordar los contenidos desde distintos puntos de vista. En este caso, trabajar con las propiedades a enseñar en distintas oportunidades. Es por ello que, además de incluir elementos para organizar una discusión a partir del copiado, también incluimos otras actividades que permiten *revisitar* las propiedades relativas a diámetros y al centro de una circunferencia. 

Bibliografía de referencia

BERTHELOT, René; SALIN, Marie-Hélène (1993-1994): “La enseñanza de la geometría en la Escuela Primaria” en *Grand N*, N° 53. París. Traducción de B. Capdevielle, L. Varela, P. Wilson para el Programa de Transformación de la Formación Docente. Buenos Aires: Dirección Nacional de Gestión de Programas y Proyectos. Ministerio de Cultura y Educación.

BROITMAN, Claudia; ITZCOVICH, Horacio (2003): “Geometría en los primeros años de la E.G.B.: problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza” (Cap. 8) en M. Panizza (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la E.G.B. Análisis y propuestas*. Buenos Aires: Ed. Paidós. Colección Cuestiones de Educación N° 41.

COLERA, José; GAZTELÚ, Ignacio; GARCÍA, Emilio (2000): *Matemáticas 1*. Madrid: Ed. Anaya. Serie Aula abierta. (Capítulos 10, 11 y 12). En línea: <http://www.mecaep.edu.uy/pdf/matematicas/2012/Jornada6/ColerayotrosMat1Cap101112.pdf>

FRIPP, Ariel; RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz (2005): “Trazados sí... pero ¿cómo?... y, ¿para qué?” en B. Rodríguez Rava; M. A. Xavier de Mello (comps.): *El Quehacer Matemático en la Escuela. Construcción colectiva de docentes uruguayos*, pp. 70-79. Montevideo: FUMTEP/Fondo Editorial QUEDUCA.

ITZCOVICH, Horacio (2007): “Acercas de la enseñanza de la geometría” (Cap. 6) en H. Itzcovich (coord.): *La Matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor. Colección: Carrera Docente. Serie: El abecé de...

QUARANTA, María Emilia; RESSIA DE MORENO, Beatriz (2007): “El copiado de figuras como un problema geométrico para los niños” en *Enseñar matemática*. Colección 0 a 5. La Educación en los primeros años, N° 56. Buenos Aires: Novedades Educativas. En línea: <http://www.mecaep.edu.uy/pdf/matematicas/2012/Jornada6/QuarantaMEEmiliayRessiadeMorenoBeatrizElcopiadodefiguras.pdf>

SADOVSKY, Patricia; PARRA, Cecilia; ITZCOVICH, Horacio; BROITMAN, Claudia (1998): *Matemática. Documento de trabajo N° 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*. Buenos Aires: Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula. En línea: <http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/docum/areas/matemat/doc5.pdf>