



Escribir en Matemática en el nivel escolar

Beatriz Rodríguez Rava | Maestra. Licenciada en Ciencias de la Educación. Investigadora en Didáctica de la Matemática. Coordinadora del Equipo de Investigación e Innovación en Enseñanza de la Matemática, Revista *QUEHACER EDUCATIVO*.

La Matemática, como toda disciplina, apela a un lenguaje particular para referir a los objetos y relaciones matemáticas. Este lenguaje está cargado de representaciones semióticas.

Las representaciones semióticas son marcas que están en el lugar de algo, y juegan un papel fundamental en el aprendizaje de la Matemática y en la construcción de las representaciones internas.

«La representación semiótica es un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático. La actividad matemática exige la interacción permanente con este sistema de signos.» (Rodríguez Rava, 2011:3)

Las representaciones son «una señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático, también como signo o marca con el que los sujetos piensan las matemáticas (...) Las representaciones matemáticas se han entendido (...) como todas aquellas herramientas –signos o gráficos– que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático» (Rico, 2009:3).

El mismo autor sostiene que es a través de la interacción con ellas que los sujetos otorgan significados y comprenden las relaciones matemáticas.

Según Raymond Duval, las representaciones semióticas juegan un papel fundamental en el aprendizaje de la Matemática.

«Hay dos características que distinguen la actividad cognitiva que requieren las matemáticas de la requerida por otros dominios de conocimiento: la importancia primordial de las representaciones semióticas y la variedad considerable de los tipos de representación movilizadas.» (Duval, 1999:25)

Esta postura trasciende la idea de que las representaciones solo constituyen marcas de lo que se piensa.

«La idea de que las representaciones semióticas constituyen una manera de poner por escrito lo ya pensado está muy difundida en las prácticas de enseñanza. Sin embargo, es una idea difícil de sostener cuando tomamos conciencia de que los objetos matemáticos solo existen a través de las herramientas que se inventan para expresarlos y de que las posibilidades de producción de conocimiento están condicionadas por la disponibilidad de dichas herramientas.» (Sadovsky, 2005:32)

Las representaciones semióticas se constituyen en la “puerta de entrada” a un objeto matemático. Y es una de las paradojas que plantea Duval (1999): se accede a los objetos conceptuales a través de las representaciones semióticas. Esta se constituye en una de las dificultades de comprensión que enfrentan los alumnos en el aprendizaje de la Matemática.

Duval señala: «*La primera exigencia cognitiva para comprender en matemática es poder utilizar por lo menos dos representaciones de un mismo objeto, sin confundir nunca al objeto mismo con los contenidos respectivos de las dos representaciones. Esto significa que es necesario poder reconocer al mismo objeto en las dos representaciones*» (Duval, 2014:15).

Cada representación es parcial con respecto a lo que representa, por lo que la interacción entre las diferentes representaciones del objeto matemático es imprescindible para la formación de cualquier concepto matemático.

Es por ello que «*la actividad conceptual necesita la coordinación de los registros de representación (...) es necesario que el sujeto haya llegado al estado de la coordinación de las representaciones semióticamente heterogéneas, para que sea capaz de discriminar el representante del representado, o la representación y el contenido conceptual que esta representación expresa, instancia o ilustra*» (Duval, 1995:60).

Es necesario considerar que la articulación entre distintas representaciones no se da de manera natural.

Los aportes de la Teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1995) obligan a repensar la enseñanza de la Matemática, integrando la reflexión sobre el papel que juegan las representaciones semióticas en el aprendizaje de la Matemática.

Los movimientos “pendulares” y extremos que se generaron en los ámbitos de la enseñanza de la Matemática, muchas veces sin fundamentación teórica, hicieron que se pasara de una enseñanza centrada en las representaciones a otra que las desacreditó totalmente.

«*Las concepciones formalistas... han influenciado tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas, de forma que ésta se ha basado más en la manipulación sintáctica de símbolos y reglas que en el significado de los mismos. (...) Numerosos trabajos han mostrado que una buena parte de los errores que cometen los alumnos se debe a que estos aprenden a manipular símbolos de acuerdo a ciertas reglas, sin atender el significado de los mismos.*

[...]

Como una alternativa a dichas tradiciones sintácticas, aparecen tendencias que han venido denominándose conceptuales o, más modernamente, semánticas.» (Gómez-Granell, 2000:293/296)

Estas líneas de trabajo priorizan los aspectos conceptuales de la Matemática otorgándole un papel totalmente secundario al lenguaje, ya que es visto como «*una mera traducción de lo conceptual*» (*ibid.*, p. 296). Desde estas concepciones que han pretendido rescatar positivamente el valor de lo conceptual, se dejó de lado el papel que juega la utilización de las representaciones semióticas en el aprendizaje de la Matemática.

A partir de los aportes de la investigación y fundamentalmente de la Teoría de los registros de representación semiótica, desarrollada por Duval, venimos planteando la necesidad de redireccionar el trabajo con las representaciones semióticas. Esto implica resignificar la lectura y la escritura matemáticas como formas de hacer de la propia disciplina.

¿Por qué la escuela debe enseñar a leer y a escribir Matemática?

Generalmente se cree que la lectura y la escritura son habilidades generalizables, independientes del marco disciplinar que les da origen y desvinculadas de las formas de hacer propias de cada disciplina.

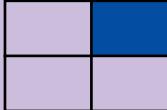
Hay representaciones que utiliza la Matemática, reglas de utilización de esas representaciones, que le son propias; por lo que la lectura y la escritura deben considerarse prácticas sociales situadas y dependientes del ámbito disciplinar. El desconocimiento de esto explica la creencia de que “se debe enseñar a leer, no específicamente en Matemática, sino enseñar a leer cualquier texto”.

«*La lectura y escritura suelen ser consideradas técnicas separadas e independientes de la enseñanza y aprendizaje de una asignatura particular, algo que debería haber sido aprendido en otra parte, enseñado por otro. Los textos exigidos en las diferentes disciplinas para interpretar y/o producir, responden a convenciones discursivas específicas y plantean en cada una de ellas desafíos propios del campo, que sólo pueden ayudarse a enfrentar dentro de su contexto y con relación a su contenido particular.»* (Rodríguez y Belladona, 2006:310)

Esto hace que sea necesaria su enseñanza. Las funciones que cumplen la lectura y la escritura en Matemática implican que sean consideradas valiosas instancias en el proceso de aprendizaje, ya que «son herramientas involucradas en la comprensión y elaboración del conocimiento...» (*ibid.*, p. 311).

La lectura y la escritura matemáticas suponen enfrentarse a representaciones generadas por distintos sistemas semióticos. Estos sistemas «comportan reglas, más o menos explícitas, que permiten combinar los signos entre sí de tal manera que la asociación formada tenga también un sentido» (Duval, 1999:43). A estos sistemas semióticos de representación, Duval los denomina *registros de representación semiótica*. Considera que la actividad matemática pone en juego permanentemente varios registros, «algunos vinculados al funcionamiento cognitivo común (lengua natural) y otros creados por las necesidades del desarrollo de la actividad matemática» (*ibid.*, p. 63).

Así, por ejemplo, el número $1/4$ puede ser representado en diferentes registros:

REGISTROS	REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS
LENGUAJE NATURAL	un cuarto – cuarta parte
ARITMÉTICO	$1/4 - 0,25 - 2/8$
GRÁFICO	
ALGEBRAICO	$Y = f(x) : x = x / 4$
FIGURAL	

La transformación de las representaciones dentro de un mismo registro ($1/4 - 2/8$) es la que Duval denomina tratamiento. Aquella que se da entre distintos registros es la llamada conversión y es una «operación cognitivamente mucho más compleja» (*ibid.*, p. 45).

¿A qué le llamamos escribir Matemática en el nivel escolar?

Es producir marcas en escenarios matemáticos. Y un escenario matemático es todo espacio que obligue a establecer relaciones con objetos matemáticos.

Escribir en Matemática a nivel escolar implica aprender a utilizar las representaciones¹ y convenciones propias de la disciplina. Exige también el aprendizaje de un vocabulario matemático.

Podemos considerar la escritura como marca de un recorrido, como resultado de un proceso, como muestra de los conocimientos que tiene quien escribe; en este caso, el alumno escolar.

¿Qué escriben los alumnos escolares?²

Para dar respuesta a esta pregunta analizamos ciento ochenta cuadernos de alumnos de primero a sexto grado escolar, correspondientes a un período de tres años.

Encontramos fundamentalmente números, cuentas, trazados de figuras, resultados de mediciones, gráficos estadísticos, fórmulas, enunciados. Al analizar las distintas marcas presentes en los cuadernos identificamos la presencia de variados registros de representación semiótica: lenguaje natural, registro aritmético, figural, gráfico y algebraico.

Las escrituras matemáticas que producen los niños varían de acuerdo a la actividad que se les propone. Si nos centramos en el tipo de relación que se establece con el objeto de conocimiento, las clasificamos en:

- ▶ actividades de producción
- ▶ actividades de documentación
- ▶ actividades de identificación. (Rodríguez Rava, 2012)

¹ Hay algunas representaciones que no forman parte de lo que consideramos escritura matemática; por ejemplo, las representaciones físicas de las figuras espaciales.

² RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz (2011-2013): "Estudio sobre las escrituras matemáticas de alumnos de la Escuela Primaria (pública y privada)". Documento no publicado.

Actividades de producción³

Son aquellas en las que el alumno debe: trabajar con el objeto matemático, construir relaciones, recorrer un camino (un hacer), generar una “respuesta nueva” que surja del planteo inicial, presentar argumentaciones, etcétera.

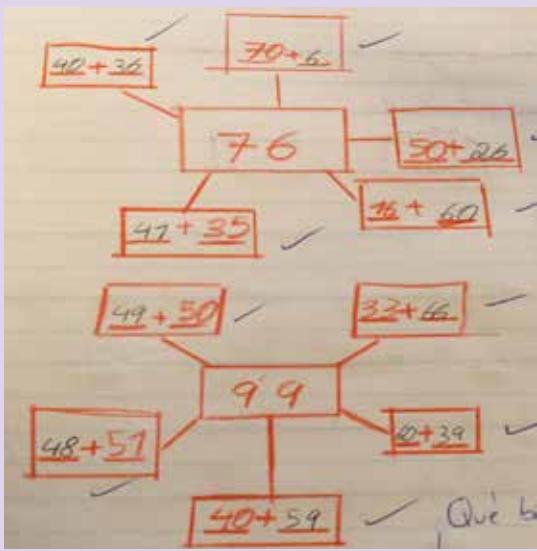
Resolver un problema haciendo cuentas o un trazado, hacer mediciones efectivas y anotar las medidas a las que se llegó, argumentar defendiendo una afirmación, son acciones que involucran la escritura matemática e implican producción.

En esta categoría también incluimos aquellas actividades en las que el alumno tiene que hacer el camino “inverso”: por ejemplo, a partir de una cuenta elaborar un “problema”, a partir de representaciones figurales describir los pasos de su construcción.

A continuación presentamos algunos ejemplos de las actividades que denominamos de producción.

Actividad de primer grado

¿Cómo los escribo?

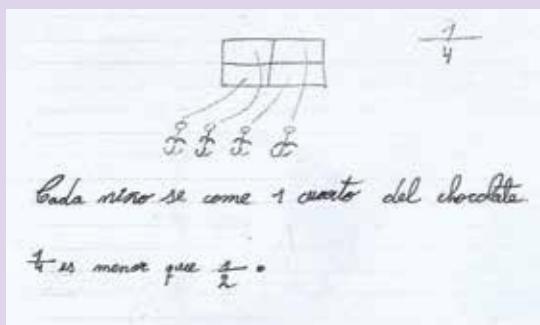


Es una actividad de producción que obliga al alumno a representar el 76 y el 99 de distintas formas. Estas diferentes expresiones de un mismo número «corresponden a distintas interpretaciones y perspectivas del mismo objeto» (Panizza, 2003:35). Hay transformaciones del número en un mismo registro, el aritmético.

³ En este artículo presentamos algunas actividades encontradas por Rodríguez Rava (2011-2013), y otras tomadas de distintas publicaciones o elaboradas para este trabajo.

Actividad de segundo grado

Ante el planteo: “*Observen el dibujo de Manuel (1 chocolate entre 2 niños). Luego ustedes deben hacer el de Pablo. En el dibujo de Pablo hay el doble de nenes que en el de Manuel. ¿En cuál de los dos repartos creen ustedes que le toca más chocolate a cada niño?*”, encontramos la siguiente resolución:



Fuente: ANEP, Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática. Trabajo presentado en el II Congreso de Educación Privada. Montevideo, setiembre 2007.

En este caso, el alumno no solo plasma la solución, sino que también representa la situación.

La escritura producida por el alumno incluye distintos registros de representación, gráfico, numérico y lenguaje natural. Es interesante observar el papel que se le otorga a los diferentes registros utilizados. Aquí la solución aparece representada en los tres registros elegidos por el alumno.

Actividad de sexto grado

Completa escribiendo los números que faltan.

a) $\frac{3}{4} + \dots = 1$
b) $\frac{3}{4} + \dots = 2$
c) $\frac{3}{4} + \dots = 3$
d) $\frac{5}{7} + \dots = 1$
e) $\frac{5}{7} + \dots = 2$
f) $\frac{5}{7} + \dots = 4$
g) $\frac{7}{5} - \dots = 1$
h) $\frac{9}{4} - \dots = 2$
i) $\frac{9}{4} - \dots = 1$

Fuente: Damisa y otros (2006:100)

La actividad promueve la escritura de un número que permita satisfacer cada una de las igualdades. Es una actividad de producción que apunta a relacionar números. En esta ocasión, la fracción aparece como número, no representa ningún reparto, ni división, ni ninguna situación particular.

Obliga a trabajar con el objeto matemático, concretamente con los números, y da la posibilidad de integrar distintas representaciones de los mismos: fraccionaria, natural, decimal.

Actividad de quinto grado

¿Qué forma deberían tener las caras laterales de un prisma, si su base es un rectángulo?

¿Y si la base fuera un trapecio? Dibuja las caras laterales de ambos prismas.

La propuesta exige producir la representación de figuras. En este caso es necesario anticipar, poder imaginarse o representarse mentalmente la figura para luego “hacerla”. La consigna está dada en un lenguaje natural que incluye vocabulario matemático, y la producción del alumno debe apelar a un registro figural.

Las órdenes geométricas, el relato de un algoritmo de construcción, son actividades que demandan producir escrituras aunque las mismas presenten características diferentes.

Actividades de documentación

Son aquellas actividades que exigen al alumno hablar sobre lo que él ya sabe de un objeto matemático. Esto implica documentar los conocimientos que posee con respecto a una figura geométrica, a los números, etcétera.

La elaboración de los “yo ya sé”, de legajos sobre figuras geométricas con alumnos más grandes, de información para que otros la lean, etc., son algunos ejemplos de este tipo de actividad. Generalmente, en estos casos, los niños apelan al lenguaje natural, pero incorporan vocabulario y simbología matemáticos.

Tradicionalmente, esta tarea la hacía el maestro, o en forma conjunta con los alumnos. Nosotros entendemos que es una tarea que debe restituírse al alumno por el valor que tiene. Le exige poner en palabras lo que sabe sobre un objeto matemático, y esto obliga a establecer una relación diferente con dicho objeto.

Actividad de sexto grado

Ante el planteo de la maestra de escribir todo lo que habían aprendido sobre la división, un alumno escribió en su cuaderno:

La división es una cuenta que te deja saber cuánto te da un reparto.

Se puede escribir de distintas maneras $18/2$ o podés poner $18:2$ o la podés hacer parada.

Tiene un dividendo y un divisor, un resultado y el resto que a veces te da cero o más.

El resto siempre tiene que ser más chico que el divisor.

Si dividís un número por ese mismo número el resultado es 1 y no te sobra nada.

Si vos en una división multiplicás el dividendo y el divisor por un mismo número el resultado te da igual.

Si el dividendo es más chico que el divisor el resultado de la división siempre te va dar cero coma y algo más.

Cuando dividís un número decimal por otro decimal el resultado te puede dar un número decimal o uno entero.

Es una actividad que se enmarca dentro de lo que se podría denominar “cierres provisорios” a partir del trabajo sistemático realizado. Obliga al alumno a pensar en los “yo ya sé” y a explicitarlos en forma escrita. En este caso, el alumno utiliza escrituras numéricas y lenguaje natural con incorporación de vocabulario matemático.

Este tipo de propuesta oficia como una forma de documentar los conocimientos y aquí se le devuelve al alumno la responsabilidad de pensar y escribir sobre lo que ya sabe.

Actividad de primer grado

La maestra asigna a cada equipo una figura geométrica. Ningún equipo sabe qué figura le tocó a los restantes.

Juegan de a dos equipos enfrentados (A y B). El equipo A debe escribir pistas para que el equipo B pueda averiguar qué figura le tocó al A.

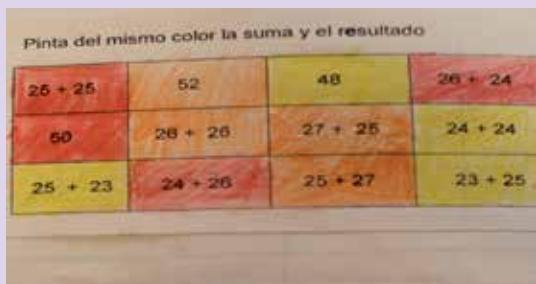
En esta actividad, a diferencia de la anterior, la documentación tiene como finalidad ser leída por otro equipo que deberá identificar la figura. Si la consigna planteara que el equipo receptor de las pistas debe representar la figura, la actividad para este segundo equipo sería de producción.

Actividades de identificación

En esta categoría incluimos aquellas actividades de escritura que no exigen producción ni documentación. La solución está dada y es necesario reconocerla.

Son actividades que pueden resultar muy potentes, a pesar de que en ocasiones son poco valorizadas por algunos docentes.

Actividad de primer grado



La actividad obliga a identificar las distintas representaciones de un mismo número. Para su resolución, en este caso, el alumno puede apelar al repertorio de cálculos de que dispone o apoyarse en escrituras auxiliares.

Actividad de tercer grado



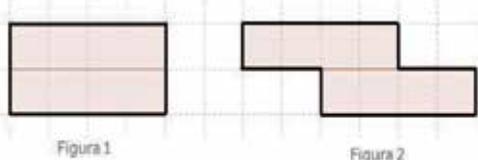
Fuente: ANEP. SEA (2012a)

La propuesta implica establecer relaciones entre números pertenecientes a un mismo registro de representación. Exige identificar relaciones y poner marcas.



Actividad de sexto grado

Con dos piezas iguales armé estas dos figuras:



Podemos decir que las dos figuras tienen:

- A) Igual área y diferente perímetro
- B) Igual área e igual perímetro
- C) Diferente área e igual perímetro
- D) Diferente área y diferente perímetro

Fuente: ANEP. SEA (2012b)

La actividad pone en juego la independencia del perímetro y el área. El alumno debe identificar la afirmación correcta. Desde el punto de vista de la lectura y la escritura lo obliga a interactuar con representaciones figurales y con el lenguaje natural con vocabulario matemático.

En síntesis podemos afirmar que las escrituras matemáticas encontradas en cuadernos de escolares son generadas mayoritariamente por actividades de producción. Hay una escasa presencia de actividades de documentación e identificación.

Por otra parte identificamos un predominio de escrituras en registro aritmético (números y cuentas). En los grados inferiores se matizan con representaciones gráficas, mientras que en los grados superiores se intercalan con algunas pertenecientes a los registros figurales y algebraicos.

Reflexión final

La escritura matemática exige el conocimiento de las distintas representaciones que utiliza la Matemática. Disponer de variadas representaciones pertenecientes a distintos registros da la posibilidad, a los alumnos, de realizar distintas transformaciones que implican actividades cognitivas de gran valor en el aprendizaje de la Matemática.

La enseñanza de las representaciones debe contemplar la dificultad que supone el cambio de registro, el reconocimiento de un objeto a través de distintas representaciones, el evitar que el objeto matemático se identifique con una

representación, y la articulación de las distintas representaciones de un mismo objeto matemático. Nada de esto se aprende espontáneamente; requiere de un trabajo intencional y sostenido a lo largo del ciclo escolar. Es necesario considerar las convenciones propias de la Matemática y las propias de cada registro.

Esto hace que tanto la lectura como la escritura cobren un nuevo estatus dentro de los proyectos de enseñanza de la Matemática a lo largo de la escolaridad. No alcanza con que el alumno sepa leer y escribir en Lengua, es necesario enseñar a leer y escribir en Matemática. Y este es un nuevo desafío de los colectivos docentes. 

Bibliografía citada

ANEPEA (2012a): “Prueba de Matemática para 3º año”. En línea: <http://www.anep.edu.uy/sea/wp-content/uploads/2013/03/Prueba-mat-3-2012.pdf>

ANEPEA (2012b): “Prueba de Matemática para 6º año”. En línea: <http://www.anep.edu.uy/sea/wp-content/uploads/2013/03/Prueba-mat-6-2012.pdf>

DAMISA, Carla; FRIPP, Ariel; PAZOS, Liliana; RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz; VILARÓ, Ricardo (2006): *Cuadernos de Estudio II*. Montevideo: ANEP. CODICEN. Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP. En línea: <http://www.mecaep.edu.uy/pdf/matematicas/2012/CuadernoDeEstudioII.pdf>

DUVAL, Raymond (1995): *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

DUVAL, Raymond (1999): *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

DUVAL, Raymond (2014): “Comment analyser le problème crucial de la compréhension des mathématiques?” en *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, N° 37 (Marzo), pp. 9-29. En línea: <http://www.fisem.org/www/union/revisitas/2014/37/archivo5.pdf>

GÓMEZ-GRANEL, Carmen (2000): “La adquisición del lenguaje matemático: símbolo y significado” en A. Teberosky; L. Tolchinsky: *Más allá de la alfabetización*. Buenos Aires: Ed. Santillana.

PANIZZA, Mabel (2003): “Reflexiones generales acerca de la enseñanza de la matemática” en M. Panizza (comp.): *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*. Buenos Aires: Ed. Paidós, Colección Cuestiones de Educación, N° 41.

RICO, Luis (2009): “Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática” en *PNA*, Vol. 4, N° 1, pp. 1-14. En línea: [http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Rico2009PNA4\(1\)Sobre.pdf](http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Rico2009PNA4(1)Sobre.pdf)

RODRÍGUEZ, Silvia E.; BELLADONA, Sandra (2006): “La lecto-escritura en Matemática” en *IREPEM – Memorias*, pp. 310-317. Santa Rosa, La Pampa, Argentina. En línea: <http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem06/memorias/comunicaciones/Reflexiones/CRG1.pdf>

RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz (2011): “Notas de trabajo”. *Directores: espacio de reflexión compartida*. Montevideo: CLAEH.

RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz (2012): “Escribir en matemática a nivel escolar”. PAEPU. Documento no publicado.

SADOVSKY, Patricia (2005): *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal. Colección Formación Docente - Matemática.