



¿Existen alumnos de veinticinco watts?

Carla Damisa | Profesora de Matemática, docente en IINN de Montevideo y Cursos de Formación en Servicio para Maestros.

Al pensar en los problemas de enseñanza en el área de Matemática, es habitual considerar ciertas formas de enseñanza a las que no adherimos, pero que están presentes en las aulas. Proponer un cierto problema que involucra un determinado contenido después de haber trabajado ya con el mismo, es una práctica común. Bajo ese paradigma, por ejemplo, para tratar con multiplicaciones es necesario haber enseñado el algoritmo de la multiplicación para luego proponerles a los alumnos un problema que ponga en juego dicho contenido.

Actualmente, en nuestras aulas comienzan a aparecer rupturas con ese modelo de enseñanza. Hay maestros que proponen el problema como fuente misma del conocimiento. Es decir que para resolverlo, el alumno necesita movilizar conocimientos que apenas se comienzan a construir, y para el cual los conocimientos anteriores se muestran insuficientes. Sin embargo, hay que tener en cuenta que estos nuevos conocimientos no se presentan aislados, sino que están relacionados con otros, algunos ya conocidos y algunos aún sin conocer. Es en el juego de estas relaciones que es posible avanzar en la construcción de las ideas matemáticas.

Como expresa Sadovsky: «Dado que es la actividad matemática en tanto actividad de producción la que nos interesa “producir” en la escena del aula...»¹ es que consideramos pertinente pensar en una gestión de clase que tenga en cuenta las condiciones en la que este proceso se desarrolla.

Para considerar este proceso de producción de conocimiento matemático resulta imprescindible trabajar con la idea de “modelización”. Esta idea de modelización exige, desde el punto de vista docente, profundizar en el contenido a tratar como objeto de enseñanza, considerar los problemas que presentan estos conceptos y las relaciones que se tejen con otros. Estas relaciones entre los conceptos son las que

permiten resolver nuevos problemas en la medida que esas relaciones se problematicen.

En este artículo nos planteamos analizar una actividad propuesta a un tercer año, enmarcada dentro de una secuencia que atiende a la multiplicación de números naturales entre una y dos cifras. Los alumnos se hallan en posesión del algoritmo de multiplicación por una cifra, pero no conocen aún el algoritmo clásico de la multiplicación entre dos cifras.

La maestra presenta un problema multiplicativo cuyo significado atiende a la proporcionalidad directa. Analizaremos las producciones de los alumnos que conviven en la clase enmarcada dentro los parámetros que hemos citado anteriormente. Es decir, nos interesa la producción de conocimiento matemático en el aula, realizada bajo algunas condiciones que se van construyendo. Para ello necesitamos una cierta modelización matemática como respuesta óptima. No obstante, llegar a ella no impide poner en juego conocimientos diferentes que poseen esos alumnos cuando se enfrentan a la resolución de un problema multiplicativo, cuyo significado atiende a la proporcionalidad directa.

Sabemos, gracias a investigaciones de la Psicología Cognitiva, en particular apoyándonos en los aportes de G. Vergnaud, que a pesar de que un mismo contenido matemático resuelva diversos problemas, estos problemas, que tienen un tratamiento matemático similar, son esencialmente diferentes para el sujeto que está aprendiendo. Esta situación pone en evidencia la necesidad de tratarlos en clase de manera diferenciada. En particular, para el tratamiento del problema que vamos a analizar y que hemos categorizado dentro de los problemas multiplicativos con significado de proporcionalidad directa. Asumimos, entonces, que no es lo mismo un problema multiplicativo con significado de proporcionalidad que otro con significado de producto escalar

¹ P. Sadovsky (2005).

o de reparto. Esto trae como consecuencia que el tratamiento en clase debe ser diferenciado, porque para el alumno que está en situación de aprender, aunque el problema se resuelva con multiplicaciones (modelo matemático), es esencialmente diferente a otros que ya resolvió, dado que implica relaciones diferentes. Esta situación nos muestra que resolver un problema no es simplemente buscar la respuesta correcta, es también elaborar hipótesis, conjeturas, que deben ser confrontadas con otras, ver los grados de validez, etc.

Desde esta perspectiva, entender la actividad matemática como producción de conocimiento en el aula implica que no consideramos a los alumnos como “alumnos de cien watts o de veinticinco watts”², sino que ofrecemos las condiciones necesarias en el aula para que todos o la gran mayoría puedan acercarse al conocimiento que pretendemos sea construido.

El problema que vamos a presentar no es diferente de los que se plantean habitualmente en las aulas, podría tildarse de “clásico”. Sin embargo, el aspecto que marca la diferencia es la gestión docente. Esta gestión convierte la resolución de este problema en “actividad matemática”, en la que aparece la producción de conocimiento referido a la multiplicación por dos cifras, sin haberlo “dado” previamente. Así, la maestra habilita ciertas condiciones en la clase para que aparezcan producciones acerca de la resolución de este problema, crea las condiciones para que se produzcan y permite que los alumnos utilicen los conocimientos de que disponen para resolver la situación.

Estas condiciones están referidas a un “dejar hacer de la maestra”, con ciertos criterios, sin develar la respuesta, sosteniendo la interrogante en el tiempo para que los alumnos sean capaces de ir validando sus construcciones. No es esperable un único camino de resolución, la idea es que surjan diferentes producciones a partir de la reutilización de conocimientos que cada alumno posee, de las relaciones que han ido construyendo vinculadas al conocimiento que se necesita poner en juego. Trabajar bajo estas condiciones es considerar al alumno como sujeto capaz de construir el conocimiento que aparece como óptimo para la resolución del problema elegido.

Esta situación implica no trabajar con problemas aislados, sino con secuencias didácticas en las que aparezca la problematización de los contenidos, para ir tratando todos los aspectos que se deben atender sobre ese conocimiento en ese curso.

El problema propuesto por la maestra³ presenta el siguiente enunciado:

“Camino a la escuela

Alejandro vive a 150 metros de la escuela. Él recorre el trayecto 4 veces en los días de clase. ¿Qué distancia recorre en una semana? ¿Qué distancia recorre en un trimestre? (aproximadamente 11 semanas).”

El enunciado del problema sitúa al alumno en un contexto conocido, sencillo, pero a partir de la información ofrecida y de las interrogantes planteadas, crece en complejidad. Aparecen dos preguntas. La primera relativa a la cantidad en metros que recorre Alejandro en una semana en la que va a la escuela. Aquí los alumnos tienen que considerar que la idea de semana está referida no a los siete días, sino a los cinco que concurren a la escuela, pues la información que nos brinda es relativa al camino que realiza Alejandro los días que va a la escuela.

Para contestar esta pregunta no es suficiente realizar una multiplicación, pues aparece como información “4 veces en los días de clase” y se pregunta por la cantidad de metros recorridos al cabo de cinco días.

En un análisis previo podríamos considerar que los alumnos pensarán que, en definitiva, Alejandro recorre el trayecto en los 5 días, 20 veces⁴ y, en estas condiciones, realizar luego la multiplicación por 20. Sin embargo creemos que los alumnos, para resolver la situación, apelarán a trabajar “por partes”. Es decir, relacionar primero la cantidad de metros que recorre en un día de clase y luego, al cabo de 5 días de clase. Hasta las formas de resolución que tomen pueden atender a multiplicaciones de una cifra.

Sin embargo, la segunda pregunta exige atender la cantidad durante 11 semanas y aquí, para resolver la actividad, deben poner en juego multiplicaciones por dos cifras. No se espera que utilicen el algoritmo convencional, ya que se sabe que, en general, no disponen de él, dado que no ha sido enseñado previamente.

La idea es que trabajando sobre la base de conocimientos que ya poseen -como la multiplicación por una cifra, las relaciones con el sistema de numeración en cuanto a la formación de los números utilizando ciertos desagregados que les convengan y el conocimiento en

² Expresión usada por B. Charlot, en conferencia dictada en Cannes (1986), para hacer referencia a alumnos “buenos y malos”, poniendo el énfasis de esa situación por fuera del alumno sin que el profesor tenga nada que ver allí.

³ Maestra de 3er año Lorena Navarro, de la Escuela N° 228. Actualmente realiza el Curso de Apoyo a la Enseñanza de la Matemática para maestros de CSCC.

⁴ El 20 resultaría de realizar mentalmente 4x5, correspondiente a 4 veces durante 5 días.

acto de las propiedades de las operaciones- puedan resolver la situación planteada. La idea es producir un conocimiento que hasta ahora no se había presentado. Es la situación la que exige del alumno apelar a relaciones y conocimientos que ya posee, y que potenciados bajo ciertas condiciones producirán nuevos conocimientos: en este caso, la multiplicación por dos cifras.

Este conocimiento no surge solo. Se construirá a partir de confrontaciones, comparación y utilización de diferentes estrategias para resolver la situación, reflexiones colectivas y explicitación de propiedades que se han puesto en juego. Se evidencia, entonces, el rol fundamental de la gestión del maestro, desde la planificación de la actividad, su puesta en juego y las reflexiones que esta produzca para relacionarlas con lo que aparece en el aula. No nos interesa la clasificación de las respuestas en “lograda”, “no lograda” o “parcialmente lograda”. Lo que nos interesa es compartir los procedimientos de los alumnos, elegidos pertinentemente por la maestra, considerar las diferentes producciones que aparecen, analizar los conocimientos que están en juego en cada producción. Esto nos llevará a plantear futuras actividades para atender lo que todavía no se ha producido en clase. Es aquí que no tenemos, entonces, alumnos de cien o veinticinco watts, porque cada uno podrá producir y comparar sus producciones para lograr avanzar.

Analizaremos, a continuación, algunas producciones aparecidas en el 3er año de la Escuela N° 228, de la maestra Lorena Navarro. Las producciones nos muestran los diferentes conocimientos sobre multiplicación que conviven en el aula. Es importante subrayar que no conviven porque sí, sino porque la docente las ha promovido con las diferentes actividades realizadas. De esta forma se evidencian construcciones distintas sobre el contenido que se está trabajando, construcciones sobre el sentido de la multiplicación que los alumnos van elaborando sobre la base de lo que la maestra va habilitando.

Análisis de producciones de alumnos

1) Producciones de alumnos que multiplican utilizando “la suma”

Para responder la primera pregunta del problema, los alumnos ponen en juego conocimientos de suma. Realizan la suma “repetida” de 150 obteniendo, de esta manera, 600 que corresponde a lo que recorre Alejandro en un día de clase. Como se preguntaba “cuántos metros recorre en una semana” (5 días de clase) realizan nuevamente una suma repetida con 600 como sumando 5 veces, obteniendo 3.000 metros. Se evidencia así que aún no manejan el algoritmo clásico de la multiplicación por una cifra (o si lo manejan no ven acá la economía que logra) y, sin embargo, resuelven el problema realizando la suma repetida de los sumandos que corresponden en cada caso.

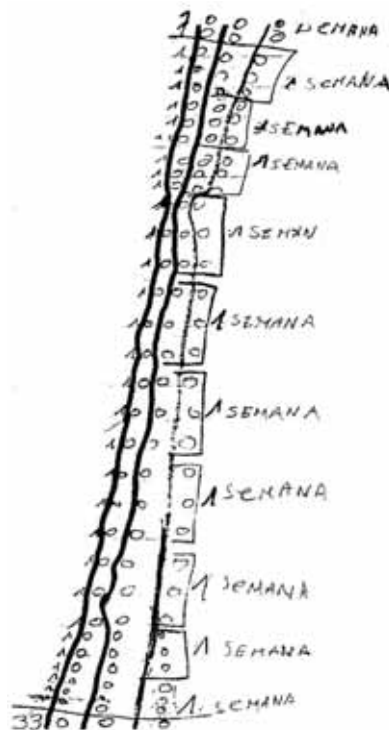
c)

$$\begin{array}{r}
 150 \\
 + 150 \\
 + 150 \\
 + 150 \\
 \hline
 600
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 600 \\
 + 600 \\
 + 600 \\
 + 600 \\
 \hline
 3000
 \end{array}$$

Para resolver la segunda pregunta vuelven a repetir la idea que han construido de la multiplicación pero no suman 11 veces 3.000 como podría esperarse si fuera “el mismo procedimiento” que utilizaron anteriormente. Necesitan descomponer el 3.000 en 3 sumandos de 1.000. Parece que para este grupo de alumnos el dominio numérico está determinando el procedimiento a utilizar no solamente para multiplicar, sino también para sumar.

Se observa el control de las 11 semanas marcadas explícitamente. Quizás no hayan sumado, sino “contado” miles, y así obtienen 33.000. Este grupo de alumnos aún no toma la multiplicación como modelo que resuelve estos problemas. Sin embargo (y no es menos valioso) los resuelven por procedimientos que se relacionan con conocimientos de numeración y de suma. Todavía deben realizar cierto recorrido.

La confrontación con diferentes procedimientos, donde los más económicos muestren sus ventajas, podría ser un camino a recorrer con este grupo de alumnos.



2) Producciones de alumnos que combinan multiplicación y suma

El ejemplo elegido es representativo del grupo de producciones en las que se combinan multiplicaciones de una cifra y sumas con sumandos repetidos a partir de un desagregado más económico que el aparecido en la categoría anterior.

Se observa que aquí los alumnos manejan la multiplicación de una cifra como modelo para ciertos problemas. Sin embargo, frente a la exigencia de la segunda parte de la actividad (multiplicación por 11) no pueden poner en juego directamente la multiplicación por dos cifras como modelo.

De igual forma proceden a resolver la actividad. Van desagregando utilizando la descomposición del 3.000, no como el de la categoría anterior que descomponía todos “los 3.000” en tres de 1.000, sino que aparece un repertorio de formación de 3.000 como $2.000 + 1.000$.

En cuanto al registro no necesitan colocar el signo de suma. Van controlando el número de sumandos y registran solamente diez. Podemos preguntarnos, ¿cómo llegaron a la suma 33.000? ¿Habrán contado alguno dos veces? o, ¿sabían cuál era el resultado?

Más allá de estas interrogantes, este grupo de alumnos del cual hemos elegido una producción que los representa, maneja el modelo de la multiplicación como un procedimiento económico cuando es una multiplicación por una cifra, y vuelve a relaciones construidas en relación con la suma y el sistema de numeración para cuando los dos factores superan las dos cifras.

$$\begin{array}{r} 150 \\ \times 4 \\ \hline 600 \end{array}$$

R1) En una semana recorre 600.

$$\begin{array}{r} 600 \\ \times 5 \\ \hline 3000 \end{array}$$

R2)

$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2000 \\ 1000 \\ \hline \end{array}$

33 000

3) Producciones de alumnos que combinan suma, multiplicación y registro rectangular para multiplicar

Esta producción muestra varios momentos según los números que aparecen en juego, dependiendo de sistemas de estrategias para plantear la multiplicación según sea de una cifra o de más cifras.

Sin embargo, observemos que para obtener la cantidad de metros recorridos en un día, realiza una suma repetida, obteniendo así 600 metros por día. Para la cantidad de metros recorridos en una semana, multiplica por 5. Va controlando con una marca lo recorrido en una semana y luego realiza una distribución rectangular de 4 columnas por 3 filas en la que controla el número de semanas, realizando un conteo y tachando la que sobra. “Sabe” que $4 \times 3 = 12$.

Aparece una respuesta escrita con las unidades que corresponden.

CASINO A LA ESCUELA
Alejandro vive a 150 metros de la escuela. El recorre el trayecto 4 veces por día en los días de clase.
¿Que distancia recorre en una semana?
¿Que distancia recorre en un trimestre? (aproximadamente 11 semanas)

A)

$$\begin{array}{r} 150 \\ \times 4 \\ \hline 600 \end{array}$$

Sumas

$\begin{array}{r} 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \\ 3000 \end{array}$
---	---	---	---

R1: recorre 33.000 en 3 m.
R2:

4) Producciones de alumnos que utilizan la multiplicación

Como siempre, hemos elegido una producción para representar esta categoría. En ella aparece, en las dos respuestas, el modelo de multiplicación para este tipo de actividades. Sin embargo, aunque no manejen el algoritmo convencional por dos cifras, este grupo de alumnos trabaja con la descomposición del factor 11 como $6+5$, vinculando de esta manera conocimientos sobre el sistema de numeración, desagregados de números y la propiedad distributiva en acto. No saben cómo se llama, no saben que es una propiedad, pero saben que funciona y que es una herramienta económica para resolver este problema y otros, en los que se necesite este conocimiento.

Obsérvese que $3.000 \times (5+6)$ no es otra cosa que la multiplicación de 3.000×11 desarrollada.

De esta manera ponen en juego, como ya dijimos, la propiedad distributiva realizando productos parciales de una cifra que ellos ya manejan: 3.000×5 y 3.000×6 . Buscando luego el resultado total para 3.000×11 , sumando los productos parciales obtenidos.



En ambas preguntas aparecen las respuestas correspondientes con sus unidades abreviadas.

Sin duda, estos alumnos ya han incorporado que la multiplicación es un modelo matemático tan potente como la suma, y más potente y pertinente en esta situación, pudiendo ponerla en juego utilizando relaciones construidas frente a otros conocimientos: relación con la suma, propiedades de la multiplicación, conocimientos del sistema de numeración.

$$\begin{array}{r}
 130 \\
 \times 4 \\
 \hline
 600
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 600 \\
 \times 5 \\
 \hline
 3000
 \end{array}$$

11. Se recorren 3000 m a la semana.

$$4 \times 4 = 16$$

$$\begin{array}{r}
 3000 \\
 \times 6 \\
 \hline
 18000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3000 \\
 \times 5 \\
 \hline
 15000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 18000 \\
 + 15000 \\
 \hline
 33000
 \end{array}$$

21. Se recorren 33000 m en un trimestre.

5) Producciones de alumnos que multiplican, utilizando el algoritmo convencional

No se presenta ninguna producción de estos alumnos porque utilizan, en ambos casos, el algoritmo clásico de la multiplicación tanto por una cifra como por dos cifras.

A modo de conclusión

Es válido observar cómo estos alumnos fueron potenciados por la docente que propone un problema, dentro de una secuencia de actividades, en la que interviene la multiplicación por dos cifras como recurso más económico de resolución. A su vez, ha potenciado cierto trabajo en clase, que posibilita herramientas tales que pueden brindarles posibilidades de poner en juego lo que ya conocen para resolver el problema y construir, a su vez, un nuevo conocimiento: la multiplicación entre dos cifras.

El objetivo de esta maestra no fue trabajar primero el algoritmo de multiplicación por dos cifras y luego proponer un problema de “aplicación”, sino sustancialmente lo contrario. A partir de conocimientos que ya

poseen, las relaciones construidas entre ellos y con otros, lograr la construcción de un nuevo conocimiento, es decir, como expresa Vergnaud, citado por David Block⁵, «el problema como fuente misma de conocimiento».

A pesar de que unos cuantos alumnos manejan la multiplicación por una cifra como modelo para resolver ciertos problemas, al cambiar el multiplicador a dos cifras no pueden resolver la actividad utilizando la multiplicación directamente. Es evidente que, aunque matemáticamente esta actividad se resuelve con multiplicaciones, no es lo mismo, para el alumno que está aprendiendo, multiplicar por una o dos cifras. Retomando lo que decíamos al comienzo del artículo, para el sujeto que aprende son sustancialmente diferentes las multiplicaciones por una y dos cifras. Es necesario, entonces, atender estos aspectos a la hora de planificar el contenido a enseñar y de hacerlo avanzar, problematizándolo.

Se ha enmarcado esta actividad dentro de una secuencia en la que irán apareciendo los diferentes significados de los problemas multiplicativos para lograr así, por parte del alumno, la construcción de sentido de la multiplicación no solamente al cambiar de una cifra a dos cifras, sino además recorriendo los diferentes significados dentro del grupo de problemas multiplicativos a los que pertenece este, junto con los que se modelizan con la división. 

Bibliografía citada y consultada

- BLOCK, David (1996): “Análisis de las situaciones didácticas” en *Básica. Revista de la escuela y del maestro*, N° 11. México: Fundación SNTE para la Cultura del Maestro Mexicano.
- BROUSSEAU, Guy (1986): “Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática”. Córdoba: Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
- CHARLOT, Bernard (1986): “La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de la Matemática”, Conferencia dictada en Cannes. Extraído del material de lectura seleccionado en el Postítulo “Enseñanza de la Matemática para el nivel primario (EGB1 y EGB2)”. Buenos Aires: CePA.
- RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz (2005): “De las operaciones... ¿qué podemos enseñar?” en Beatriz Rodríguez Rava y Ma. Alicia Xavier de Mello (comps.): *El Quehacer Matemático en la Escuela. Construcción colectiva de docentes uruguayos*. Montevideo: FUM-TEP - Fondo Editorial QUEDUCA, pp. 130-150.
- SADOVSKY, Patricia (2005): *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal. Colección Formación Docente - Matemática.
- VERGNAUD, Gérard (1991): “La teoría de los campos conceptuales”. Traducción de Ana Álvarez del original “La théorie des champs conceptuels” en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3. Grenoble: La Pensée Sauvage.

⁵ D. Block (1996).