DIDÁCTICA y Prácticas Docentes

La fracción, ¿qué dificultades encierra?

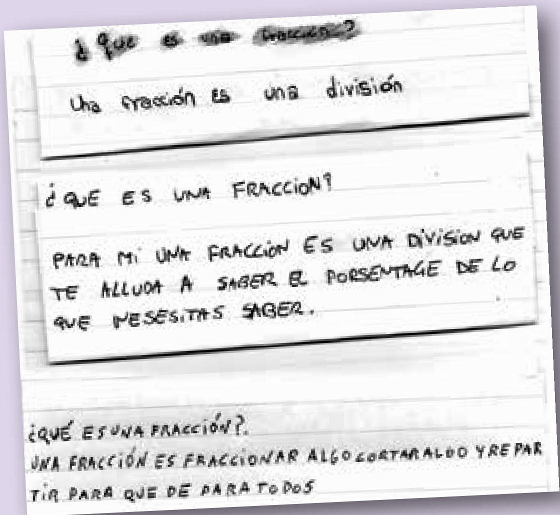
Lucía Brusa | Mariana Corujo | Maestras. Integrantes del Equipo de Investigación e Innovación en Enseñanza de la Matemática, Revista *QUEHACER EDUCATIVO*.

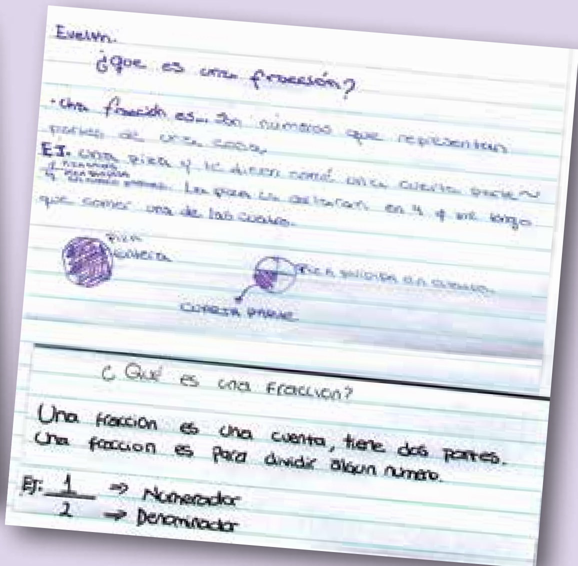
La fracción es un número. Esta afirmación parecería no estar tan clara para nuestros alumnos.

A los efectos de relevar las ideas de los escolares sobre la fracción como un número, propusimos a cincuenta alumnos de sexto grado de una escuela de Montevideo la siguiente pregunta: **¿Qué es una fracción?**

Solo dos de ellos dos respondieron que la fracción "es un número".

La mayoría de las respuestas hace mención a algunos de los aspectos trabajados a lo largo del ciclo escolar: la fracción como cociente y la fracción como parte de un todo.





En este artículo nos proponemos analizar algunas causas que impiden que estos alumnos visualicen la fracción como número. Pretendemos plantear posibles líneas de acción para contribuir a superar estas dificultades.

Al egresar del ciclo escolar, los alumnos llevan un conocimiento importante de los números naturales. Sin embargo no ocurre lo mismo con los números fraccionarios. En este caso pudimos ver que casi la totalidad de los alumnos no ve a la fracción como un número. Frente a esto nos interrogamos sobre las posibles causas de este hecho. Consideramos que la dificultad de identificar las fracciones como un número se puede atribuir al propio objeto matemático, a su aprendizaje o a problemas de su enseñanza.

La fracción, un objeto matemático complejo

La fracción es una representación de los números racionales. *«Los números racionales admiten expresión fraccionaria, es por eso que usualmente se suele confundir el concepto de número racional y el de fracción.»* (Damisa y otros, 2006:17).

Para definir el conjunto de los números racionales, Abella, Gil y Vilaró (2007:6-7) plantean:

> *«En el conjunto $Z \times Z^*$ de todas las posibles parejas ordenadas de enteros, donde el segundo es distinto de cero, definimos la relación de equivalencia*
> $(p, q) \sim (r, s)$ *si y sólo si* $p \times s = q \times r$. *(1)*
> *(...) Llamamos conjunto Q de los números racionales al conjunto formado por todas las clases de equivalencia de la relación definida en (1)».*

No es nuestra intención que la definición de número racional tenga un lugar en la escuela. Sí nos parece importante considerarla a los efectos de conceptualizar ese objeto matemático por parte de los maestros.

El concepto de fracción es difícil y requiere de una construcción personal que lleva largo tiempo. Si bien supone una ampliación de otros conjuntos numéricos (naturales y enteros), su apropiación demanda la resignificación de distintos aspectos relativos a sus representaciones y operaciones. El funcionamiento de los números racionales supone un quiebre con respecto a los conocimientos acerca de los números naturales.

Las dificultades de su aprendizaje

Estas dificultades del objeto matemático lo transforman en un objeto difícil de aprender.

La necesidad de resignificar determinados conocimientos que los alumnos tienen con respecto a los números naturales, genera ciertos desequilibrios. Deben romper con algunas certezas que han construido sobre esa base y que en el conjunto de los números racionales dejan de funcionar. Por ejemplo, la idea de que "cuánto más cifras tiene un número es mayor", que la multiplicación "siempre agranda" y la "división siempre reduce".

Algunas de estas ideas permanecen durante largos períodos actuando como verdaderos obstáculos en el aprendizaje de las fracciones.

> *«Un obstáculo se manifiesta, por tanto, por sus errores, pero esos errores no son debidos al azar. Fugaces, erráticos, son reproducibles, persistentes. Además esos errores, en un mismo sujeto, están ligados entre ellos por una fuente común, una manera de conocer, una concepción característica, coherente si no correcta, antigua y que ha tenido éxito en todo un dominio de acciones.*
> *Sucede que no desaparecen radicalmente, de un solo golpe, que resisten, que persisten, luego resurgen, se manifiestan mucho tiempo después que el sujeto haya rechazado de su sistema cognoscitivo consciente el modelo defectuoso.»* (Brousseau *cf*. Hernández y Villalba, 1999:4)

Las dificultades de su enseñanza

A medida que trabajamos con las fracciones en nuestras aulas, nos encontramos con que los números racionales son "un problema" tanto en su expresión fraccionaria como decimal.

Para enfrentar esta dificultad insistimos en algunas prácticas de enseñanza, limitando el abordaje de la fracción a unos pocos significados: la fracción como parte-todo o como cociente.

«El número racional se define como clase de equivalencia y, por lo tanto, las infinitas fracciones que la integran son distintas representaciones del mismo número, diferentes formas de escribirlo. Esta enorme potencialidad de los racionales queda olvidada en el reduccionismo que apela "a pintar la misma superficie de tortas o pizzas divididas en cierto número de porciones".» (Pazos, 2005:124)

Entendemos que muchas veces los maestros preferimos no abrir el contenido en sus distintos aspectos, antes de cometer errores conceptuales.

Sostenemos que el significado parte-todo es muy importante abordarlo, especialmente desde los primeros niveles escolares. Esta forma de acercar a los alumnos a un contenido tan difícil es valiosa como puerta de entrada a una secuencia que a lo largo de la escolaridad debería ir profundizando en el concepto.

Somos conscientes de que no siempre alcanzamos los objetivos de enseñanza y de aprendizaje que nos proponemos. Reconocemos que buenas prácticas de enseñanza no aseguran buenos aprendizajes, pero también sabemos que una gestión que no es reflexiva y atenta, desde el punto de vista didáctico habilita errores conceptuales en los aprendizajes de nuestros alumnos o conduce a formas de hacer impuestas por los docentes. Al respecto compartimos lo siguiente:

«Los límites de su saber frente a la situación son los que provocan que el sujeto ponga en duda sus conocimientos y se aboque a la búsqueda de nuevas formas de resolución. ¿Qué desequilibrio le provocaría a un sujeto la resolución de un problema si en la consigna o en la intervención del maestro está explícito lo que hay que hacer? En ese caso, ¿quién actúa: el alumno o el docente?» (Ressia de Moreno, 2003:83)

Dar tiempo para que nuestros alumnos puedan enfrentarse a un contenido, significa muchas veces ir contra la dinámica escolar existente. Pero si estamos convencidos de que el aprendizaje es un proceso y que para cada niño es único, tenemos la obligación de respetarlo e intervenir en consecuencia. Cuando nuestros alumnos encuentran obstáculos y dificultades frente a un contenido, nos vemos tentados de buscar formas de "facilitarles" la resolución pero en ocasiones, lejos de facilitar, obstaculizamos el proceso de aprendizaje.

Es por ello que creemos importante abordar la enseñanza de las fracciones desde el nivel inicial de la escuela primaria, tal como lo señala el Programa Escolar.

¿Cómo podemos enseñar las fracciones a lo largo del ciclo escolar?

Para realizar un abordaje lo más amplio posible tomamos en cuenta el aporte de distintos autores para considerar la fracción:

- como parte de la unidad
- como parte de una colección
- como composición de operadores
- como cociente
- como razón entre dos cantidades.

Presentamos algunos ejemplos

1. Ana quiere repartir una hoja entre dos alumnos. ¿Cómo puede hacer?
En este tipo de situación, la fracción surge de la relación entre la parte y la unidad. Los alumnos deben obtener la parte a partir de la unidad.

2. Si 8 es la mitad de las galletitas que hizo la mamá de Salvador, ¿cuántas galletitas hizo en total?
La fracción como parte de una colección. En esta actividad deben encontrar la unidad a partir de una parte y además, la unidad, a diferencia de la situación anterior, es un conjunto discreto.

3. 10 niños son la quinta parte de los participantes de un campeonato de deporte escolar. ¿Cuántos niños participan del campeonato?
La fracción como operador. En esta actividad, para establecer la unidad es necesario realizar una composición entre dos operadores, estableciendo una relación de proporcionalidad. Si 1/5 son 10 niños, entonces hay que calcular cuántos niños son 5/5 y para resolverlo es necesario multiplicar o sumar.

4. Se quieren repartir 3 barras de chocolate entre 5 personas. ¿Cuánto le toca a cada uno si todos comen lo mismo?
   La fracción como cociente. En este caso, la unidad es una colección (3 barras de chocolate) y deben encontrar la parte de la unidad que le corresponde a cada uno. Este significado, uno de los más abordados en la escuela primaria, es muy valioso para iniciar la enseñanza de las fracciones.

5. Para una excursión, una familia tiene que elegir entre una agencia en la que cada 3 personas pagan 2, y otra en la que cada 6 personas pagan 5. ¿Cuál les conviene?
   Aquí la fracción aparece como una razón entre dos cantidades.

En las actividades **1** y **3** es interesante no aclarar la equitatividad y exhaustividad del reparto, observar los procedimientos de los alumnos y realizar intervenciones que permitan reflexionar en torno a que las fracciones de la unidad deben ser iguales, para luego continuar avanzando en la construcción del contenido y sus propiedades.

En la actividad **5** aparece la fracción como razón y a veces se hace difícil encontrar el límite entre ambos conceptos. Para una mayor comprensión resulta interesante el siguiente aporte:

«La noción de razón se encuentra en la intersección de dos temas muy estudiados, la proporcionalidad, sobre todo desde la perspectiva del desarrollo cognitivo (...) y los numeros racionales, desde una perspectiva didáctica (...). Una tendencia apuntalada en gran medida por los trabajos de Vergnaud (1988) sobre las estructuras multiplicativas, ha consistido en integrar el estudio de estas dos problemáticas: se considera que la adquisición de aspectos fundamentales de la noción de número racional se registra en el marco de las relaciones de proporcionalidad, a la vez que la resolución de problemas de proporcionalidad puede requerir, en algunos casos, de la aplicación de herramientas aritméticas, en particular, el cálculo con fracciones y decimales. La noción de razón constituye un ejemplo claro de esta articulación. Vergnaud (1988) por ejemplo, habla de fracciones y de razones como dos nociones del campo conceptual de las estructuras multiplicativas (...)
"No resulta sensato estudiar el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones y de las razones independientemente de las estructuras multiplicativas. (...) (Vergnaud 1988...)".» (Block, 2008)

Las estructuras multiplicativas definidas por Vergnaud incluyen además el concepto de multiplicación, división y el número racional. Sostiene que la construcción de todos estos conceptos es un proceso de muchos años.

Es importante que a lo largo de la escolaridad, los alumnos construyan la idea de que la fracción es una representación de un número. Dicho así parece axiomático y sencillo, pero sabemos que esto no es ni tan fácil ni tan lineal. Pero si partimos desde los primeros grados escolares trabajando los distintos aspectos del contenido, creemos que es posible iniciar esa construcción y sabemos que debe continuar su enseñanza en la educación media.

La fracción es un número, y por tanto es necesario recorrer sus distintos aspectos y significados. Las fracciones son números necesarios para situaciones en las que los naturales no funcionan matemáticamente.

Por lo cual es necesario realizar secuencias de enseñanza que atiendan estos aspectos, a fin de contribuir a la construcción del concepto por parte de los alumnos.

La presencia de las fracciones en el programa escolar vigente

Tres años	Cuatro años	Cinco años	Primer grado	Segundo grado	Tercer grado	Cuarto grado	Quinto grado	Sexto grado
La relación parte-todo en cantidades discretas. El todo dividido en partes iguales (dos).	La relación parte-todo en cantidades discretas y continuas. La noción de partes equivalentes en contextos continuos.	La noción de partes equivalentes en la división de la unidad (discreta o continua). La noción de mitad y mitades. La representación numérica.	La fracción como número: 1/2. Fracción de conjunto y de unidad. La composición y descomposición de la unidad con: - medios, - cuartos. Las fracciones menores que la unidad: 1/2; 1/4; 3/4. La representación gráfica de fracciones.	Las fracciones equivalentes mayores y menores a la unidad. - Otras fracciones menores que la unidad: 1/3, 1/5, 1/8. La composición y descomposición de la unidad con: - medios y cuartos, - medios, cuartos y octavos, - tercios, - quintos. La comparación y ordenación de fracciones: 1/2; 1/4; 1/8. La relación de equivalencia de fracciones conocidas. La representación de las fracciones como puntos de una recta: 1/2; 1/4; 3/4.	La fracción como cociente.	La fracción como operador.	La fracción como razón.	La fracción como expresión de una probabilidad.

El recorrido del contenido “fracciones” a lo largo del programa escolar está planteado de manera tal, que es posible desarrollar prácticas de enseñanza que les permitan a los alumnos ir construyendo el concepto de que la fracción es un número. Desde la educación inicial aparece la aproximación al contenido en la relación parte-todo. Las situaciones que generan el establecimiento de esta relación pueden ser potentes en la medida en que se trabaja la idea de igualdad de las partes y la necesidad de tantas partes para constituir el todo, la relación tamaño de las partes y cantidad de partes, el ir del todo a la parte y de la parte al todo.

Otras situaciones potentes para contribuir a la construcción del concepto de fracción son las situaciones de reparto en las que el alumno se ve obligado a expresar los resultados de repartos, y estos no pueden expresarse con números enteros.

Si bien en primer grado aparece la expresión de la fracción como número, no es posible pensar que en ese grado se construye esta idea. Será necesario trabajar a lo largo de la escolaridad para que el alumno realice esta construcción. El hecho de que el maestro visualice permanentemente la fracción como número le ayudará a pensar en situaciones que favorezcan la construcción de esa idea por parte de los alumnos.

Propuestas de actividades

Como plantea Ávila (2006:29), si bien la vida cotidiana es fuente de habilidades y conocimientos matemáticos como las fracciones, el tipo de situación que esta ofrece delimita y estructura la actividad matemática. A lo largo de la escolaridad es deseable que se aborden las fracciones en sus distintos significados y en diferentes contextos para aproximar a la idea de fracción como número, y por ello es necesario abordarla desde un contexto estrictamente matemático. Muchas veces, en la escuela solo se plantean actividades que refieren a la vida cotidiana, acotando la capacidad de desarrollo de ese conocimiento o forzando situaciones que terminan por carecer de sentido.

Posibles actividades de enseñanza[1]

Estas actividades abordan la fracción como representación de un número racional. Entre las representaciones es posible establecer relaciones de orden y de equivalencia.

[1] Actividades adaptadas de Sadovsky, Quaranta y Ponce (2006).

1- Para cada una de las siguientes fracciones, decide si son mayores o menores que 1. En cada caso anota también cuánto le falta o cuánto se pasa de 1.

a- 1/4
b- 3/2
c- 3/5
d- 3/7
e- 14/23
f- 23/14

La actividad 1 propone comparar algunas fracciones con la unidad, poniendo a prueba ese falso mito de que todas las fracciones son parte de un todo menor a la unidad.

2- ¿Cuáles de estas fracciones son equivalentes entre sí? ¿Por qué?

4/8 5/2 8/16 10/4

La actividad 2 aborda las fracciones equivalentes. Aquí es posible centrarse en las infinitas expresiones del número racional y en que una fracción x/y es una de esas tantas expresiones. Luego de esta actividad sería interesante ubicar con los alumnos esos números en la recta numérica y observar qué ocurre.

3- Los siguientes números se encuentran entre 0 y 3. Ubícalos en la columna que corresponda:
2/5 - 13/5 - 18/7 - 1 3/7 - 8/3 - 13/6 - 11/7 - 7/5 - 2 7/9

Entre 0 y 1	Entre 1 y 2	Entre 2 y 3

La actividad número 3 incluye a los números naturales como parámetros donde ubicar a los racionales. Se supone que el conjunto de los naturales es conocido por los alumnos y se intenta ampliar el concepto de número, apuntando hacia una de las propiedades que definen al conjunto de los racionales: la densidad. No es sencillo instalar la idea de que entre uno y dos hay otros números, y mucho menos que son infinitos.

Estas actividades fueron pensadas en especial para los grados superiores, en un intento de contribuir a pensar la fracción como un número.

Si bien es importante reconocer las dificultades del objeto y de su aprendizaje, es necesario revisar algunas de las prácticas de enseñanza. Q

Referencias bibliográficas

ABELLA, Andrés; GIL, Omar; VILARÓ, Ricardo (2007): “2/4 y 1/2 ¿iguales o equivalentes? ¿Qué hacer en la escuela?” Montevideo: ANEP. Programa Para el mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática. En línea: http://uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001/File/dos_cuartos%20y%20un_medio.pdf

ÁVILA STORER, Alicia (2006): “Prácticas cotidianas y conocimiento sobre fracciones. Estudio con adultos de escasa o nula escolaridad” en *Educación Matemática*, Vol. 18, Nº 1. En línea: http://www.redalyc.org/pdf/405/40518102.pdf

BLOCK, David (2008): “El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria” en R. Cantoral Uriza y otros: *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano*, pp. 495-512. México: Clame.

DAMISA, Carla; FRIPP, Ariel; PAZOS, Liliana; RODRÍGUEZ RAVA, Beatriz; VILARÓ, Ricardo (2006): *Cuadernos de Estudio II*. Montevideo: ANEP. Programa para el mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP. En línea: http://www.mecaep.edu.uy/pdf/matematicas/2012/CuadernoDeEstudioII.pdf

HERNÁNDEZ, Víctor M.; VILLALBA, Martha C. (1999): “Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas. Por Guy Brousseau”. Traducción con fines de trabajo educativo sin referencia. Reeditado como documento de trabajo para el PMME de la UNISON. En línea: http://matematicassinaloa.com/Informacion/Documentos/24_Los%20Obstaculos%20Epistemologicos%20en%20Matematicas.pdf

PAZOS, Liliana (2005): “La razón de las fracciones” en B. Rodríguez Rava; M. A. Xavier de Mello (comps.): *El Quehacer Matemático en la Escuela. Construcción colectiva de docentes uruguayos*, pp. 124-127. Montevideo: FUM-TEP/Fondo Editorial QUEDUCA.

RESSIA DE MORENO, Beatriz (2003): “La enseñanza del número y del sistema de numeración en el nivel inicial y en el primer año de la EGB” (Cap. 3) en M. Panizza (comp.): *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*, pp. 73-130. Buenos Aires: Ed. Paidós, Colección Cuestiones de Educación Nº 41. En línea: http://www.mecaep.edu.uy/pdf/matematicas/EscuelaComun/2011/04RessiadeMorenoBLAensenanzadelNySND.pdf

SADOVSKY, Patricia (coord. autoral); QUARANTA, María Emilia; PONCE, Héctor (elab. del material) (2006): *Matemática. Cálculo mental con números racionales. Apuntes para la enseñanza*. Buenos Aires: Secretaría de Educación. GCBA. En línea: http://www.sermaestro.com.ar/calculo_racional_web.pdf

VERGNAUD, Gérard (1988): “Multiplicative structures” en H. Hiebert; M. Behr (eds.): *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, pp. 141-161. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.